物理学最前線

3

大槻義彦 編

超低温における固体ヘリウム

長岡洋介

重力場の量子論

中西 襄

HRTEMの分解能をきめる因子

美浜和弘

共立出版株式会社

刊行にあたって

20 世紀の物理学の進歩はめざましい．1 年間になされる研究の発展は，19 世紀物理学の発展の 10 年分にも 20 年分にも匹敵するとさえいわれる．そしてまた，物理学の進歩は間髪を入れず産業に応用され，技術を革新し，市民の生活に大きな影響を与え，それがさらに物理学そのものを発展させる原動力にもなっている．

かくして，たった 1 年間の物理学の発展にすら，物理学自身追いついてゆけないという悲喜劇が生まれる．物理学会誌にのる多くの解説は，自分の専門とする分野以外さっぱり理解できないというのが現状であろう．もはや物理学者にすら理解できなくなった物理学など，文化として，人類の共通の遺産として，はたして存在価値のあるものであろうか．

もちろん，情報過多の今日，この進歩しすぎる難解な物理学を，やさしく解説しようという試みは山とある．とくに "*Physics Today*" や "*Scientific American*"（邦訳『サイエンス』），『自然』などはきわめてユニークで意欲的で，それなりに成功しているといえるであろう．しかし，これらはあくまでも雑誌であり，たかだか数ページの内容であるから，最先端の物理学を紹介するには不十分である．一方，最先端の専門書など難解をきわめ，しかもたいてい英文である．

そこで，“物理学の最前線”をとりあげ，十分な分量でやさしく解説する刊行物が望まれる．つまるところ，シリーズ『物理学最前線』は科学雑誌がもつやさしいトピックス解説の手法と，単行本がもつゆとりと専門性をミックスさせ，わが国科学文化に寄与しようというものである．これによって“専門バカ”を生む物理学の体質を改善し，大学・高校などの教員，および専門研究者・エンジニアに最先端の物理学を広め，専門間の交流をうながし，物理学をふたたび豊かな文化の一員に復帰させようというものである．

大 槻 義 彦

目　次

超低温における固体ヘリウム―長岡洋介

重力場の量子論＝中西　襄

HRTEM の分解能をきめる因子═美浜和弘

重力場の量子論

中西 襄

序

重力場の量子論は，最近非常に満足すべき理論形式として定式化された．以下はこの理論の主要な部分の紹介である． 要約は§1·4を見ていただきたい．

場の量子論に関する一応の素養のある読者ならば理解できるように，一般相対論および場の量子論の一般論の復習からはじめ，ゲージ場の共変的正準量子論の構成についても解説した．本論は7章からである．

本稿執筆の直前，筆者の恩師湯川秀樹先生が逝去された．時空構造を場の量子論の構成自体と関連させるのが先生の理想であったが，重力場の量子論は，先生ご自身のアプローチとは異なるにしても，それを精神的な意味において実現したものといえるであろう．本稿を湯川先生の霊に捧げたい．

1981年12月

1章 緒論

1·1 重力場の古典論

重力は人類にとって最も古くからなじみの深い基本的な力である．重力をはじめて定量的に正しくとらえたのは，もちろんニュートンの万有引力の法則であった．その逆自乗則をポテンシャルで書くと，質点からの距離 r に逆比例する重力の場が存在することになる．一般には，重力ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x})$ は，物質密度に重力定数を乗じたものを源（非斉次項）とするポアソンの微分方程式を満足する．

ニュートン力学とニュートンの重力理論は，地上での物体の運動から天体の運行に至る非常に広汎な現象のきわめて精確な記述を与える．しかし，周知のように，アインシュタインの相対性理論の確立によってその適用限界が明確にされたのであった．慣性系におけるニュートン力学は，容易に特殊相対論の要請に従うよう拡張される．しかし，重力はその枠内で正しく取り扱うことはできない．

非慣性系では，慣性力と呼ばれる見かけの力を導入しなければならないことは，ダランベールの原理としてニュートン力学においてよく知られていたことであった．この慣性力は慣性質量に比例し，他方，重力は重力質量に比例している．ところで，慣性質量と重力質量はすべての物質について非常に高い精度で一致している．アインシュタインはこの事実を等価原理としてとらえ，重力の本質を見ぬいたのであった．すなわち，少なくとも局所的には，すべての物質に働く重力の効果を慣性力によって打ち消すような座標系が，必ず存在する

ことになる．これによって任意の時空点の近傍では特殊相対論が成立する慣性系を設定でき，これを座標変換することによって一般の場合が規定されることになる．

一般相対論を導いた偉大な着想は，最も一般的な座標系でもって理論を定式化するということであった．すなわち，4次元時空に対する一般座標変換のもとで，基本方程式がその形を変えないという一般共変性の要請（一般相対性原理）により，理論の枠組みが構成されるのである．特殊相対論のローレンツ不変なミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$（$\mu, \nu=0, 1, 2, 3$）は，一般座標変換により時空に依存する対称テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ に拡張される．そして一般の $g_{\mu\nu}(x)$ を計量テンソルにもつ4次元のリーマン幾何学が，一般相対論の数学的構成を与えるのである．

一般相対論は，特殊相対論の拡張というより，本質的に重力の理論である．ニュートンの重力理論では，重力ポテンシャルがただ1個の量 $\phi(\boldsymbol{x})$ で記述されたのに対し，一般相対論では，重力はきわめて複雑な非線形連立偏微分方程式に従う $g_{\mu\nu}(x)$ という10個の独立な関数によって記述されることになる．しかもめんどうなことに，$g_{\mu\nu}(x)$ のうち4個の自由度は，一般座標変換のため見かけだけのものである．

一般相対論は，もちろん第1近似としてニュートンの重力理論を含んでいる．そしてそれからのずれは通常の状況ではきわめて小さい．一般相対論の実験的検証としては，古くから知られるいわゆる三つのテスト（光のスペクトルの赤方偏移，光の湾曲，水星の近日点移動）がある．最近これらの実験の精度は非常に高くなり，またこれ以外のテストも行われるようになった．そしてその観測結果は，すべて一般相対論を完全に支持しているのである[1]．また星や宇宙の進化も，一般相対論の正しさの傍証を与えているといえる．

一般相対論の提唱以来，その修正理論のようなものがいくつか提出されてきたが，これらはもはやすべて排除されたといってもよいであろう．もっともこれらの亜流理論は一般に勝手なパラメーターを含み，その特別な値の場合として一般相対論を再現するので，実験が一般相対論を支持する限り，これらを絶

対的な意味において否定することはできない．しかし完璧な理論構成をもち，勝手なパラメーターを全く含まない一般相対論が，すべての実験事実をみごとに説明しているのに，なにを好んでそれからの姑息な逸脱を考える必要があるだろうか．古典論の範囲内で一般相対論が最終的に正しい重力の理論であることは，もはや疑いの余地を残さないといってよいであろう．

一般相対論は，重力を時空の幾何学に帰着させた．この物理学の幾何学化という魅力的な考え方をさらにおし進めたのが，いわゆる統一場理論である．しかし，数多くの統一場理論の試みはすべて失敗に終わった．一般相対論の本質は等価原理と一般共変性であって，幾何学化はその結果の解釈にすぎない．幾何学化でもって物理学の本質をとらえようとするのは，多分正しい方向ではないであろう．

1·2　重力場の量子化の必要性

周知のように，微視的現象を支配する理論は量子論である．古典論は，量子論でプランクの定数 h をゼロにした極限で成立する近似的な理論であって，根元的な基礎理論は量子論でなければならない．

量子力学を特殊相対論の要請に従うように拡張し，粒子の生成消滅の過程を扱えるようにしたのが，場の量子論である．場の量子論では，素粒子はすべて量子化された場によって記述される．たとえば，電子はディラック場（スピノル場）によって表される．古典論でマックスウェル方程式に従う電磁場は，量子化によって光子を記述することになる．

場の理論では，基本的な力はすべて場によって伝えられるから，場の量子論ではその場を量子化して得られる素粒子によって伝達されることになる．たとえば，電磁的な力は光子の交換によってひき起こされる（ただしクーロン力を伝えるのは観測される横波の光子ではない）．

最近の素粒子物理学の成果によれば，基本的な力を媒介する場はすべてゲージ場（gauge field）であろうと考えられている．マックスウェル理論を4次元電磁ポテンシャル $A_\mu(x)$ で記述するとき，それを時空の任意関数 $\Lambda(x)$ の

4次元勾配 $\partial\Lambda/\partial x^\mu$ だけずらせても理論は不変であった．一般にこのような時空の任意関数を含む変換を局所ゲージ変換と呼び，局所ゲージ不変性をもつ理論をゲージ理論という．ゲージ理論の主役を演ずるのはもちろんゲージ場である．電磁場はゲージ場の最も簡単な例であるが，一般には非可換ゲージ場あるいはヤン-ミルズ場（Yang-Mills field）と呼ばれる，もっと複雑な局所ゲージ変換をうけるゲージ場が考えられる．強い相互作用をする粒子の基本構成子であるクォークを結びつけているグルーオンの場や，電磁相互作用と弱い相互作用とを統一的に記述するW場は，いずれもヤン-ミルズ場であるとされている．

重力以外のすべての基本的な力は，場の量子論，それもゲージ理論に基づいた場の量子論によって記述されることは，現在ではもはや確立されたといってよいであろう．しかし，それならばなぜ重力だけは除外されなければならないのだろうか．一般相対論の構成の基礎となった一般座標変換は，局所ゲージ変換と同じように時空の任意関数を含んでいる．それゆえ一般相対論はゲージ理論の仲間であるといえる．とくに非線形性という点で，重力場はヤン-ミルズ場と似ていると考えられる*．一般相対論を量子化して重力場の量子論を構成することは自然の統一的理解をうるためにはどうしてもやらねばならないことだと考えられる．

重力は微視的現象では極端に微弱であって，通常の実験では完全に無視できる．しかし，これは数値的にその影響が極端に小さいということであって，質的にその影響がないことを意味しない．実際，外力としての重力が量子論的な効果をもつことは，すでに実験的に検証されている．地球の重力やその自転に基づく慣性力が，理論から期待されるとおりにシュレディンガーの波動関数に影響を及ぼすことは，中性子干渉計を用いたみごとな実験によって確かめられているのである[2]．もちろん，これはニュートンの重力理論の範囲内の重力による量子効果であって，一般相対論に固有な高次部分による量子効果ではない．

---

* この両者の類似性は過去において強調されすぎて，ドグマになっていた感があった．ところが，実際に満足すべき重力場の量子論ができあがってから見直すと，重力場はヤン-ミルズ場よりもむしろ電磁場に似ているのである（7章参照）．

しかし，重力が量子論的効果をもつことと，重力の正しい古典論が一般相対論であることがわかっている以上，一般相対論の量子化はきわめて必然的要求であろう．

場の量子論はあまりにも整然と特殊相対論の要請に基づいて構成されている．重力場の量子化は，この特殊相対論を一般相対論にきりかえることであるから，それがひとすじなわではいかないのは当然であろう．さらに，電子やクォークを記述するスピノル場は，ローレンツ不変性を基盤としていて，一般座標変換にはなじまない．

一般相対論がなかなかうまく場の量子論の枠におさまらないので，素粒子物理学者の多くは，重力場の時空構造との結びつきを捨て，それを単なる特殊相対論の枠内のスピン2の粒子の場としてとらえようとした．そして，こうして得られる量子論がくりこみ不可能なため，重力場自身は基本的な場ではなくて他から合成されるようなものであろうとさえ考えた．このような立場では，アインシュタインの重力理論の輝かしい成功は単なる偶然に帰されてしまう．このような重力の本質を無視した考え方は，到底正しい方向であるとは考えられない．“一般相対論と場の量子論とが統合できないのなら，場の量子論の方を捨てるべきだと相対論の専門家は主張するだろう”という警句を，深刻に受けとめるべきであろう．

一般相対論と場の量子論とを自然な形で統合することは，これらの二大基礎理論の究極的な正当性を保障することに結びついており，基本的にきわめて重要な問題であるといえる．

1·3 重力場の量子化の諸研究

重力場の量子化の研究[3]は，すでに1930年頃からローゼンフェルト[4]らによる先駆的な仕事がある．しかし本格的な研究が行われるようになったのは，1950年代後半から1960年代にかけての頃である．大別すると，正準量子化 (canonical quantization) の方法と共変的量子化 (covariant quantization) の方法がある．

正準量子化の方法では，電磁場のクーロン・ゲージ（Coulomb gauge）に相当する相対論的に共変でない座標条件（coordinate condition）が採られる．マックスウェルの理論において，電磁場の第0成分 A_0 の満たす場の方程式は運動方程式でなく拘束条件（constraint）である．電磁場の理論は簡単であるので，クーロン・ゲージにおいてこの拘束条件は閉じた形であらわに解くことができ，A_0 の消去が可能であった．ところが非線形な理論では，一般にこのことは不可能である．そこで拘束条件が解けないような場合に正準量子化をどうすればよいのかが問題になる．

拘束条件のある場合の正準形式の一般論は，1950年ディラック[5] により与えられた．1958年ディラック[6] は，その方法を用いて一般相対論を正準形式に書くことに成功した．しかし，量子論に移行するには，拘束条件を状態ベクトル（state vector）を制限する条件に読みかえねばならない．ところが一般に，局所的な演算子が状態ベクトルを消すという形の条件を課すと，その演算子自身が実質上ゼロでなくてはならないことになってしまう*．したがって，ディラックの方法で満足な重力場の量子論が得られるとは考えられない．

アーノヴィット，デサー，ミスナー[8] の3人組は，アインシュタインの重力場の方程式を，時間発展を見るのに適した形に書き改めることに成功した．彼らはこの結果に基づき，拘束条件を消去して重力場を正準量子化することを試みた．しかし，もちろん重力場の場合の拘束条件は閉じた形には解けないから，摂動展開のような近似法に頼らざるをえないわけである．理論の構成それ自体に近似法が必要になるということはきわめて不満足であり，このような方法で最終的に辻つまの合った量子論が得られるかどうかは非常に疑わしい．

重力場の正準量子化には，このほか異端的なホイーラーとド・ウィットの理論[9] がある．これは上記3人組の定式化から出発するが，拘束条件を幾何学に対するシュレディンガー方程式とみなすのである．すなわち，重力場とその正準共役量をそれぞれ量子力学での座標とそれに共役な運動量に対応するものと考え，重力場すなわち時空の計量自身を独立変数とする波動関数を導入するわ

---

* 重力場については，そのことは最近コマール[7] によって具体的に示された．

けである．これはアイデアとしてはたしかに面白いが，到底理論としてきちんと体系化できそうには思われない．またかりに定式化ができたとしても，他の素粒子に対する場の量子論との統合はますます難しくなるであろう．

重力場の共変的量子化の代表的な方法は，ファインマンの経路積分法（Feynman path-integral method）[10] を用いるものである．この方法によると，古典論のラグランジアン密度が与えられさえすれば，それから作った作用積分の $i/\hbar$ 倍の指数関数を，古典場のあらゆる仮想的可能性にわたって汎関数積分することにより，直接にS行列が得られる．ただし，ゲージ場の理論のように任意関数を含む変換に対して不変な場合には，ゲージを固定するための無限次元デルタ関数を挿入することが必要である．この方法によれば，重力場は完全にヤン－ミルズ場の場合とパラレルに量子化される．したがって，理論は最初からローレンツ不変性に基づいて定式化され，一般相対論のもつ時空構造との関連性は完全に無視される．さらに量子論としても，状態ベクトルの空間がどのようなものなのか全く不明であって，演算子のエルミート性に関する情報が欠落しており，また理論のもつ対称性を記述する生成子なども作れないというような構成になっている．結局のところ，ファインマンの経路積分法は，摂動論的なS行列ないしはグリーン関数を与えるだけのものといえるであろう．とくに，摂動論に頼らなければ物理的なS行列のユニタリ性の証明ができないのは，重力場のように摂動論が本質的に不適当な理論においては，非常に不満足なことと考えられる．

グプタ[11] は，電磁場の共変的量子化に最初に成功したグプタ－ブロイラー形式（Gupta-Bleuler formalism）の方法を，そのまま重力場に適用する試みをしている．しかしこれは，はじめからユニタリ性を破っていることが明らかであるばかりでなく，理論自体もまともに構成されていない．

このほかにマンデルスタムによる経路依存ゲージ非依存の方法[12] と呼ばれるものがある．これは，電磁場のポテンシャルのようにゲージ変換を受ける量を直接量子化しないで，ゲージ不変な量の時空に関する線積分として表そうというものである．この方法はきわめて複雑な非局所的理論になるばかりでな

く，線積分を時間的方向にとることはダイナミックスを解かねばできないため，結局のところ軸性ゲージのような非共変的理論に帰着してしまうようである．

1・4　重力場の共変的正準量子論

以上のように，重力場の量子化は長い間満足な理論形式をもたなかったといえる．以下において述べる重力場の量子論[13]は，1978年以降において構成された明白な共変性をもつ正準量子論である．

この理論では，物理的S行列のユニタリ性は，摂動論に頼ることなく直接ハイゼンベルク描像において証明される．この理論の著しい特徴は，ローレンツ不変性を第一原理とせず，一般相対論のもつ時空構造と重力場との関連性を最大限に生かした形で正準量子化が遂行される点である．その結果として，重力子（graviton）の質量が正確にゼロであることが理論的に証明され，また一般相対論の古典的枠組みの中では説明不可能であったスピノル場の座標変換に対する変換性が自然に説明される．

この理論は，あとで述べるように，16次元の“ポアンカレ的超代数”と“テンソル的交換関係”というきわめて著しい性質をもつ．これらの予期しなかった美しい対称性が現れてきたことは，この理論が“本物”の重力場の量子論であることを保証するものだといってよいであろう．さらに，定性的ではあるが，場の量子論の発散の困難な最終的解決への新しい期待を開く結果も得られている．

2章　一般相対論

2·1　一般共変性

記号の説明をかねて，一般相対論の復習をしておく．

一般相対論では，重力場は時空の計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ によって与えられる．場の量子論での習慣に合わせるため，時間方向の計量を正にとる．

4次元の微分不変距離の自乗は*

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu \tag{2.1}$$

で与えられるので，$g_{\mu\nu}$ は対称テンソルであり，10個の独立成分をもつ．計量テンソルの反変成分 $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu \tag{2.2}$$

により定義される．また

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} < 0 \tag{2.3}$$

$$h \equiv \sqrt{-g} > 0 \tag{2.4}$$

とおく．

一般座標変換は，新旧時空座標の間のなめらかな一対一対応である．同一点の新旧座標をそれぞれ x'^μ, x^ν とすると

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) \neq 0 \tag{2.5}$$

である．スカラー場 $\phi(x)$，共変ベクトル場 $A_\mu(x)$，反変ベクトル場 $A^\mu(x)$ は，一般座標変換のもとにそれぞれ

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{2.6}$$

* アインシュタインの規約に従い，くりかえしてでてくる添字については和をとる．

$$A_\mu'(x')=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}A_\nu(x) \tag{2.7}$$

$$A'^\mu(x')=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}A^\nu(x) \tag{2.8}$$

のように変換される．一般のテンソル場は，ベクトル場の直積と同じように変換される量として定義される．とくに $g_{\mu\nu}(x)$ は2階共変テンソル場，$g^{\mu\nu}(x)$ は2階反変テンソル場，$\delta_\mu{}^\nu$ は2階混合テンソルである．

テンソルの基本的性質は次の三つである．

i）計量テンソルによりテンソル添字の上げ下げができる．たとえば，$A^\mu\equiv g^{\mu\nu}A_\nu$，$A_\mu\equiv g_{\mu\nu}A^\nu$ である．

ii）n階のテンソルとm階のテンソルの直積は，$n+m$ 階のテンソルになる．たとえば A_μ と B_ν がベクトルならば，$A_\mu B_\nu$ は2階のテンソルである．

iii）n階のテンソルを縮約すれば $n-2$ 階のテンソルが得られる．たとえば，2階テンソル $T_{\mu\nu}$ を縮約すれば $T\equiv T^\mu{}_\mu$ はスカラーである．

テンソルにhをかけて得られる量を，一般にテンソル密度と呼ぶ．とくに2階反変テンソル密度

$$\tilde{g}^{\mu\nu}\equiv hg^{\mu\nu} \tag{2.9}$$

は重要である．密度という言葉は，hd^4x が4次元の不変体積要素になることに由来する．

積に関してライプニッツの規則を満たすような線形演算（微分，変分，ポアソン括弧，交換子など）を一般にδで表すと，式（2.2）—（2.4）から公式

$$\delta g^{\mu\nu}=-g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\delta g_{\sigma\tau} \tag{2.10}$$

$$\delta h=\frac{1}{2}hg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}hg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.11}$$

が導かれる．

2·2　共変微分と曲率テンソル

今後，時空に関する微分 $\partial/\partial x^\mu$ を ∂_μ と略記する．

スカラー場ϕに対して $\partial_\mu\phi$ はベクトルであるが，ベクトル場や一般のテンソル場については，∂_μ をとったものはもはやテンソルにはならない．テンソル場を得るには共変微分（covariant derivative）をとることが必要である．ベクトル場の共変微分は

$$\nabla_\mu A_\nu \equiv \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda A_\lambda \tag{2.12}$$

$$\nabla_\mu A^\nu \equiv \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\nu A^\lambda \tag{2.13}$$

で定義される．一般のテンソル場については，それぞれの添字につき上と同じ規則で付加項をつけ加えていくものとする．そうすると，共変微分はライプニッツの規則を満たす．

アフィン接続（affine connection）$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ は，幾何学を決定する量である．リーマン幾何学では計量テンソルがあるので

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} \equiv \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho g_{\rho\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}{}^\rho g_{\nu\rho} = 0 \tag{2.14}$$

となるように決める．すなわち

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \tag{2.15}$$

とする．$\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ は $\mu \leftrightarrow \nu$ につき対称であるが，テンソル量ではない．式（2.11）と（2.15）により

$$\Gamma_{\mu\lambda}{}^\lambda = h^{-1}\partial_\mu h = \partial_\mu \log h \tag{2.16}$$

となるので，$\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}{}^\lambda$ は $\mu \leftrightarrow \nu$ につき対称である．式（2.16）は書き直すと

$$\nabla_\mu h \equiv \partial_\mu h - \Gamma_{\mu\lambda}{}^\lambda h = 0 \tag{2.17}$$

にほかならない．このように，テンソル密度の共変微分には $-\Gamma_{\mu\lambda}{}^\lambda$ に比例する項が余分につけ加わる．したがって，もし J^μ が反変ベクトル密度であると

$$\nabla_\mu J^\mu = \partial_\mu J^\mu \tag{2.18}$$

となるから，電流の保存を表す連続の式は共変な式である．

共変微分どうしはもちろん可換でない．実際

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A^\lambda = R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} A^\rho \tag{2.19}$$

と書けば

$$R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}{}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}{}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}{}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}{}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}{}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}{}^\sigma \tag{2.20}$$

である．これがリーマンの曲率テンソル（curvature tensor）であって，20 個

の独立成分をもつ．曲率テンソルが恒等的にゼロになることが，$g_{\mu\nu}$ が全時空にわたってミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ に変換できるための必要十分条件を与える．

曲率テンソルを1回縮約して得られる2階テンソル

$$R_{\mu\nu}\equiv R^{\lambda}{}_{\nu\mu\lambda}=\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\lambda}-\partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}+\Gamma_{\mu\rho}{}^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\rho}-\Gamma_{\rho\lambda}{}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho} \tag{2.21}$$

をリッチ・テンソル (Ricci tensor) と呼ぶ．$R_{\mu\nu}$ が $\mu\leftrightarrow\nu$ につき対称なことは，式 (2.21) において項別に確かめられる．$R_{\mu\nu}$ をもう1回縮約すると，スカラー曲率 (scalar curvature)

$$R\equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{2.22}$$

が得られる．

2·3　重力場の方程式

共変微分に対するヤコービの恒等式から，曲率テンソルに対する二つの恒等式が導かれる．このうち微分を含む方をビアンキの恒等式 (Bianchi identity) という．これから恒等式

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu}\equiv 0 \tag{2.23}$$

が導かれる．ただし

$$G^{\mu\nu}\equiv R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \tag{2.24}$$

はアインシュタイン・テンソル (Einstein tensor) である．一般に，$K^{\mu\nu}$ が計量テンソルとその2階までの微分で書き表せる2階テンソルであって，かつ $\nabla_{\mu}K^{\mu\nu}\equiv 0$ を満たすならば，$K^{\mu\nu}$ は $G^{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ との一次結合でなければならないことが証明される．他方，物質場のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は，共変的な保存則として

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu}\equiv 0 \tag{2.25}$$

を満足する．このことから

$$G^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}=-\kappa T^{\mu\nu} \tag{2.26}$$

は矛盾のない一般共変な方程式であることがわかる．これが重力場に対するアインシュタイン方程式 (Einstein equation) である．ここに，κ はアインシュ

タインの重力定数で，ニュートンの万有引力定数 G と $\kappa=8\pi c^{-4}G$ という関係にある．$\lambda g^{\mu\nu}$ は宇宙項 (cosmological term) と呼ばれ，観測は $\lambda=0$ を支持している．$\lambda\neq0$ であると，$T^{\mu\nu}=0$ であっても $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ が式 (2.26) の解にならない．それゆえ，以下ではつねに $\lambda=0$ とする．

アインシュタイン方程式は，$\ddot{g}_{ij}$ (ラテン添字は空間成分，ドットは時間微分を表す) を含むが，$\ddot{g}_{0\nu}$ を含まない．また $G_\mu{}^0$ は計量テンソルの時間に関する2階微分を全く含まない．つまりアインシュタイン方程式のうち $\nu=0$ の4組は，運動方程式ではなくて拘束条件である．したがって，$g_{\mu\nu}$ の独立な10成分のうち4成分はアインシュタイン方程式からは決められない．これは，式 (2.26) の両辺の共変微分が独立にゼロとなることから当然であって，理論の一般座標変換に対する不変性に基づいている．$g_{\mu\nu}$ を完全に決めるためには，4個の座標条件を設定することが必要である．たとえば*

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}=0 \tag{2.27}$$

は，調和座標条件 (harmonic coordinate condition) あるいはド・ドンデア条件 (de Donder condition) として知られている．

2·4　重力場のラグランジアン密度

アインシュタイン方程式は，ラグランジアン密度

$$\mathscr{L}_{\rm GR}\equiv\mathscr{L}_{\rm E}+\mathscr{L}_{\rm M} \tag{2.28}$$

から変分原理によって導かれる．ここに $\mathscr{L}_{\rm E}$ は (ヒルベルト・) アインシュタインのラグランジアン密度

$$\mathscr{L}_{\rm E}\equiv(2\kappa)^{-1}hR \tag{2.29}$$

で，$\mathscr{L}_{\rm M}$ は物質場のラグランジアン密度を表す．$\mathscr{L}_{\rm E}$ と $\mathscr{L}_{\rm M}$ はともにスカラー密度であるので，作用積分 $\int d^4x\mathscr{L}_{\rm GR}$ は一般座標変換に対し不変な量である．

$\mathscr{L}_{\rm E}$ は2階微分を含むので，このままでは正準形式を適用するのに不適当である．そこで

* $\tilde{g}^{\mu\nu}$ は式 (2.9) で定義．

$$\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{E}}\equiv(2\kappa)^{-1}\tilde{g}^{\mu\nu}(\Gamma_{\rho\lambda}{}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho}-\Gamma_{\mu\rho}{}^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\rho}) \tag{2.30}$$

なる量を $\mathscr{L}_{\mathrm{E}}$ の代わりに用いる．その差は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{E}}-\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{E}}=(2\kappa)^{-1}\partial_{\mu}(\tilde{g}^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\lambda}-\tilde{g}^{\nu\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\mu}) \tag{2.31}$$

であるので，変分原理に影響しない．

物質場のエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu}{}^{\nu}$ は

$$T^{\mu\nu}\equiv-2h^{-1}\left(\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\mu\nu}}-\partial_{\lambda}\frac{\partial\mathscr{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_{\lambda}g_{\mu\nu})}\right) \tag{2.32}$$

によって与えられ，式（2.25）を満足する．しかし，この式は式（2.18）の場合と異なり単純な保存則と一致しない．普通の意味での保存則

$$\partial_{\nu}\mathcal{T}^{\mathrm{clas}}{}_{\mu}{}^{\nu}=0 \tag{2.33}$$

を満たす量は

$$\mathcal{T}^{\mathrm{clas}}{}_{\mu}{}^{\nu}\equiv hT_{\mu}{}^{\nu}+ht_{\mu}{}^{\nu} \tag{2.34}$$

で与えられる．ここに

$$ht_{\mu}{}^{\nu}\equiv\partial_{\mu}g_{\sigma\tau}\frac{\partial\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{E}}}{\partial(\partial_{\nu}g_{\sigma\tau})}-\delta_{\mu}{}^{\nu}\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{E}} \tag{2.35}$$

は，重力場自身のエネルギー・運動量に対応する量である．しかし，$t_{\mu}{}^{\nu}$ はテンソルではないので，座標系のとり方に依存し，それに局所的な意味づけを与えることはできない．

アインシュタイン方程式を用いると，$\nu\leftrightarrow\lambda$ につき反対称なある量 $\mathcal{F}^{\mathrm{clas}}{}_{\mu}{}^{\nu\lambda}$ が存在して

$$\mathcal{T}^{\mathrm{clas}}{}_{\mu}{}^{\nu}=\partial_{\lambda}\mathcal{F}^{\mathrm{clas}}{}_{\mu}{}^{\nu\lambda} \tag{2.36}$$

と書ける．それゆえ，系の全エネルギー・運動量

$$P^{\mathrm{clas}}{}_{\mu}\equiv\int d^{3}x\,\mathcal{T}^{\mathrm{clas}}{}_{\mu}{}^{0} \tag{2.37}$$

は，ガウスの定理により表面積分に帰着してしまう．しかし，空間距離 r を無限に大きくしたとき $g_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}$ が漸近的にちょうど $1/r$ のオーダーであれば，$P^{\mathrm{clas}}{}_{\mu}$ は確定した値となり，アフィン変換（並進と一般線形変換）に対して不変となる．

全エネルギー $P^{\mathrm{clas}}{}_{0}$ は正定値であって，ゼロになるのはミンコフスキー空間のときに限ることが，最近証明された[14]．

3章　ハイゼンベルク描像での場の量子論

3・1　正準量子論の一般論

明白な相対論的共変性に基づく場の量子論の定式化としては，通常，相互作用描像 (interaction picture) とハイゼンベルク描像 (Heisenberg picture) が用いられる．前者は結局のところ摂動論，すなわち結合定数の冪展開に帰着する．相互作用の部分を自由場の部分から切り離して論ずることは，素粒子の散乱問題を考えるときにはたしかに悪くない考え方である．しかし重力場を論ずるさいには，自由場と相互作用を分離するのは極めて人為的で不適当と思われる．それゆえ以下では，ハイゼンベルク描像での場の量子論の一般論を述べる．なお，今後すべて自然単位 ($\hbar=c=1$) を用いる．

いくつかの場の演算子を一般的に $\varphi_\alpha(x)$ で表しておく．添字の α は，テンソルやスピノルの添字のみならず，内部自由度を表す添字もおしなべて含んでいるものとする．出発点となるラグランジアン密度 $\mathscr{L}(x)$ は，同時空点の $\varphi_\alpha(x)$ および $\partial_\mu\varphi_\alpha(x)$ だけで書かれているローレンツ・スカラー量であって，$\partial_\mu\varphi_\alpha$ に関しては2次式であるとする．

場の方程式は，作用積分 $\int d^4x\mathscr{L}(x)$ から変分原理によって導かれる．すなわち

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_\alpha}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\alpha)}=0 \tag{3.1}$$

である．ただし，フェルミ統計に従う場に関する微分は一貫して左からとるものとし，その演算がフェルミ場を通り抜けるときには符号をかえるものとする．

φ_α の正準共役量 (canonical conjugate) π^α は

$$\pi^{\alpha} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\alpha}} \tag{3.2}$$

によって定義される．仮定により π^{α} は $\dot{\varphi}_{\beta}$ に関する1次式になるが，さらに $\dot{\varphi}_{\beta}$ について逆に解けるものとする．このとき，同時刻 $x^0=y^0$ において正準交換（または反交換）関係（canonical commutation 〔anticommutation〕 relation）

$$[\varphi_{\alpha}(x), \varphi_{\beta}(y)]_{*}=0 \tag{3.3}$$

$$[\pi^{\alpha}(x), \varphi_{\beta}(y)]_{*}=-i\delta^{\alpha}{}_{\beta}\delta^{3}(x-y) \tag{3.4}$$

$$[\pi^{\alpha}(x), \pi^{\beta}(y)]_{*}=0 \tag{3.5}$$

を設定することにより量子化がなされる．ここに角括弧に＊をつけたのは

$$[\Phi_1, \Phi_2]_{*} \equiv \Phi_1\Phi_2-\epsilon(\Phi_1, \Phi_2)\Phi_2\Phi_1 \tag{3.6}$$

のように交換子と反交換子をまとめて書いた式である．式（3.6）で $\epsilon(\Phi_1, \Phi_2)$ $(=\epsilon(\Phi_2, \Phi_1))$ は符号因子であって，Φ_1 と Φ_2 が共にフェルミ統計に従う量であるときには -1，その他は $+1$ とする．$\epsilon(\Phi_1, \Phi_1)$ は $\epsilon(\Phi_1)$ と略記する．定義から

$$\epsilon(\Phi_1\Phi_2, \Phi_3)=\epsilon(\Phi_1, \Phi_3)\epsilon(\Phi_2, \Phi_3) \tag{3.7}$$

が成立することはすぐにわかる．以下，交換関係と反交換関係を＊印でまとめて書いた式を，超交換関係と略称することにする*.

正準超交換関係（3.3)—(3.5）から，同時刻超交換子 $[\varphi_{\alpha}(x), \dot{\varphi}_{\beta}(y)]_{*}$ が計算できる．式（3.1）は2階偏微分方程式なので，同時刻超交換関係を“初期条件”として場の演算子 $\varphi_{\alpha}(x)$ が決定されるわけである．

同時刻超交換関係が相異なる空間点に対してはつねにゼロになることと，理論のローレンツ不変性から，一般に $(x-y)^2<0$ に対し

$$[\varphi_{\alpha}(x), \varphi_{\beta}(y)]_{*}=0 \tag{3.8}$$

が成立する．これを局所性（locality）と呼ぶ．

式（3.4）の右辺はデルタ関数という超関数（distribution）である．他方，場の方程式（3.1）は一般に場に関して非線形である．同じ点での超関数の積は数学的には一般に定義できないので，以上の正準量子論の体系は数学的に厳

＊ これは，ここだけの造語である．

密でない．同時空点での場の演算子の積が発散の困難の元凶であるが，そうだからといって同時空点を避けようとするともっとたちの悪い困難にでくわす．発散の困難は，くりこみ可能な理論ではくりこみ（renormalization）によって一応回避できるので，同時空点での場の演算子の積をくりこんだファインマン積分に基づいて定義しようという考えもある．しかし，これも摂動級数が収束しなければ厳密に定義したことにはならない．

数学的厳密性にこだわっていては先に進めないので，ここでは同時空点での場の演算子の積は一意的に意味をもつものと仮定する．そしてこのときその積は，統計性に基づく全体の符号を除き，演算子の順序にはよらないものとする．超交換関係の右辺はデルタ関数なので，同時空点での場の演算子の積が順序によって二つの相異なる意味のある量にはなりえないからである．

3·2　ポアンカレ生成子

正準エネルギー・運動量テンソル（canonical energy-momentum tensor）は

$$T^{\mathrm{can}}{}_{\mu}{}^{\nu}\equiv\partial_{\mu}\varphi_{\alpha}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\nu}\varphi_{\alpha})}-\delta_{\mu}{}^{\nu}\mathscr{L} \tag{3.9}$$

によって定義される．これは保存則

$$\partial_{\nu}T^{\mathrm{can}}{}_{\mu}{}^{\nu}=0 \tag{3.10}$$

を満たす．$T^{\mathrm{can}}{}_{\mu}{}^{\nu}$ から並進生成子（translation generator）

$$P_{\mu}\equiv\int d^3x\,T^{\mathrm{can}}{}_{\mu}{}^{0} \tag{3.11}$$

およびローレンツ生成子（Lorentz generator）

$$M_{\mu\nu}\equiv\int d^3x(x_{\mu}T^{\mathrm{can}}{}_{\nu}{}^{0}-x_{\nu}T^{\mathrm{can}}{}_{\mu}{}^{0}-i\varphi_{\beta}(s_{\mu\nu})^{\beta}{}_{\alpha}\pi^{\alpha}) \tag{3.12}$$

が定義される．ここに $s_{\mu\nu}(=-s_{\nu\mu})$ は場のスピンに対応した c 数の行列である．もちろん，$M_{\mu\nu}$ は $\mu\leftrightarrow\nu$ につき反対称である．

式（3.11），（3,12）と φ_{α} に関する同時刻超交換関係から

$$[P_{\mu},\varphi_{\alpha}(x)]=-i\partial_{\mu}\varphi_{\alpha}(x) \tag{3.13}$$

$$[M_{\mu\nu},\varphi_{\alpha}(x)]=-i(x_{\mu}\partial_{\nu}-x_{\nu}\partial_{\mu})\varphi_{\alpha}(x)-\varphi_{\beta}(x)(s_{\mu\nu})^{\beta}{}_{\alpha} \tag{3.14}$$

が導かれる．これらはそれぞれ $\varphi_\alpha(x)$ が並進およびローレンツ変換に対し，明白に共変に変換することを示している．

P_0 はハミルトニアンにほかならない．ハイゼンベルク方程式 $[P_0, \varphi_\alpha]=-i\dot{\varphi}_\alpha$ は正準超交換関係を使って左辺を計算すれば恒等式になり，$[P_0, \pi^\alpha]=-i\dot{\pi}^\alpha$ は π^α の定義式 (3.2) を代入すれば場の方程式 (3.1) を再生する．

ポアンカレ生成子 (Poincaré generator) P_μ と $M_{\mu\nu}$ はポアンカレ代数 (Poincaré algebra) の交換関係

$$[P_\mu, P_\nu]=0 \tag{3.15}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\lambda]=i(\eta_{\nu\lambda}P_\mu-\eta_{\mu\lambda}P_\nu) \tag{3.16}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}]=i(\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho}-\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho}+\eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda}-\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda}) \tag{3.17}$$

を満足する．

3·3　漸　近　場

場の演算子 $\varphi_\alpha(x)$ は非常に複雑な量であって，われわれの観測と直接には結びつかない．素粒子的描像と結びついているのは，漸近場 (asymptotic field) と呼ばれるものである．

$\varphi_\alpha(x)$ は演算子であるから，それが作用する対象が必要である．それが状態ベクトルであり，状態ベクトルの全体は無限次元線形空間をなす．これによって場の演算子の表現 (representation) が決まる．

状態ベクトルをディラックの記号 $|\mathrm{a}\rangle$, $|b\rangle$ などで表す．内積は $\langle\mathrm{a}|\mathrm{b}\rangle$ のように書く．もちろん複素共役に対しては，$\langle\mathrm{a}|\mathrm{b}\rangle^*=\langle\mathrm{b}|\mathrm{a}\rangle$ である．

次の漸近条件 (asymptotic condition) を仮定する．すなわち，ある演算子 $\varphi_\alpha{}^{\mathrm{in}}(x)$ と $\varphi_\alpha{}^{\mathrm{out}}(x)$ が存在して，任意の状態ベクトル $|a\rangle$, $|b\rangle$ に対し，$x^0\to-\infty$ のとき

$$\langle a|(\varphi_\alpha(x)-\varphi_\alpha{}^{\mathrm{in}}(x))|b\rangle\to0 \tag{3.18}$$

$x^0\to+\infty$ のとき

$$\langle a|(\varphi_\alpha(x)-\varphi_\alpha{}^{\mathrm{out}}(x))|b\rangle\to0 \tag{3.19}$$

となるものとする．ここに $\varphi_\alpha{}^{\mathrm{in}}(x)$ と $\varphi_\alpha{}^{\mathrm{out}}(x)$ は，同じ形の自由場の方程式

と同じ形の自由場の4次元超交換関係を満足する．これらを漸近場という．一般には，$\varphi_\alpha(x)$ の漸近場が存在しない場合（不安定粒子や閉じ込めの場合）や，いくつかの場の演算子の組み合わせが漸近場をもつ場合（複合粒子の場合）などがあるが，そのことには立ち入らない．

漸近場は自由場であるので，消滅演算子（annihilation operator）と生成演算子（creation operator）を定義することができ，それゆえ粒子数演算子（number operator）が意味をもつ．粒子数ゼロの状態ベクトルは一意的に存在するものとし，真空（vacuum）と呼ぶ．これを $|0\rangle$ と記し，$\langle 0|0\rangle=1$ とする．真空はポアンカレ不変，すなわち

$$P_\mu|0\rangle=0,\quad M_{\mu\nu}|0\rangle=0 \tag{3.20}$$

である．標準的な考え方では，式（3.20）を真空の定義とする．しかし，その定義は必ずしも上の漸近場による定義とは同等でないことに注意しなければならない．

$|0\rangle$ に漸近場の生成演算子をかけていって作られる状態ベクトルを漸近状態（asymptotic state）という．$x^0\to-\infty$ の漸近状態 $|\mathrm{in}\rangle$ と，$x^0\to+\infty$ の漸近状態 $|\mathrm{out}\rangle$ との内積 $\langle\mathrm{out}|\mathrm{in}\rangle$ によってS行列が定義される．$|\mathrm{in}\rangle$ のはるフォック空間（Fock space）と，$|\mathrm{out}\rangle$ のはるフォック空間とが同じ線形空間ならば，S行列は形式的にユニタリである．真にユニタリであるためには，この空間の計量の正定値性が必要である（次章参照）．

もとの場の演算子 $\varphi_\alpha(x)$ の表現空間が漸近場のフォック空間と一致すべしという要請を，漸近的完全性（asymptotic completeness）という．漸近的完全性が満たされていると，$\varphi_\alpha(x)$ は原理的に漸近場でもって書き表すことができる．漸近場は場の演算子から極限として得られるのだから，$\varphi_\alpha(x)$ の表現空間は少なくとも漸近場のフォック空間を含まなければならないであろう．したがって漸近的完全性は，$\varphi_\alpha(x)$ の表現空間が余分なものを含まないという要請にほかならない．すなわち理論の自己完結性を表しているのである．

漸近的完全性の要請に対しては，根強い反対がある．しかしながら，その論拠の根底には，状態ベクトルの空間の計量は本来正定値であるべきだというか

たくなな信仰と，真空は式 (3.20) によって定義されなければならないとする先入観に基づく誤解とがあるようである．そのために粒子として観測されない自由度の存在は，漸近的完全性と矛盾すると思ってしまうのである．しかし，決して観測されない漸近場も存在するのである．

場の量子論は無限大自由度の系を扱っており，その表現は同値でないものが無限に多く存在する．もし漸近的完全性を要請しなければ，$\varphi_\alpha(x)$ の表現空間としてどのようなものを選ぶかについての一般的原則がなくなってしまう．明確な原則に基づかずにたまたま見つけた表現を絶対的なもののように信ずるのは，いたずらに素粒子論を混迷におとしいれるだけであろう．

3·4　対称性とその自発的破れ

一般に，作用積分が連続的な変換に対して不変であると，それに対応する生成子が存在する．たとえば，並進不変性とローレンツ不変性に対応して，それぞれ P_μ と $M_{\mu\nu}$ が存在する．考えている対称性の無限小変換のもとでの任意の演算子 Φ と時空 x^μ の変化率を，それぞれ $\delta\Phi$ と δx^μ で表し

$$\delta_*\Phi \equiv \delta\Phi - \delta x^\mu \cdot \partial_\mu \Phi \tag{3.21}$$

とおく．内部対称性については $\delta x^\mu = 0$ であるので $\delta_*\Phi$ は $\delta\Phi$ と一致するが，時空対称性の場合にはこの区別は重要である．δ_* は座標の値を変えないように調整したものであって，δ とちがってつねに ∂_μ と可換である．また $\delta_* x^\mu \equiv 0$ である．

作用積分の不変性から，ネーター・カレント (Noether current)

$$J^\mu \equiv \delta_*\varphi_\alpha \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_\alpha)} + \delta x^\mu \cdot \mathscr{L} \tag{3.22}$$

の存在が導かれる．これが保存則

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{3.23}$$

を満足することは，δ_* と ∂_μ との可換性，場の方程式 (3.1)，δ_* の定義 (3.21)，および作用積分の不変性

$$\delta\mathscr{L} + \partial_\mu \delta x^\mu \cdot \mathscr{L} = 0 \tag{3.24}$$

を用いて示される．式（3.23）から

$$Q \equiv \int d^3x J^0(x) \qquad (3.25)$$

が保存量となるはずであることがわかる．

しかし，質量ゼロの粒子が存在する場合には，式（3.25）の積分は必ずしも収束しない．その場合には Q は演算子としてよく定義された（well-defined）量とはいえず，それの固有値を考えることもできない．しかし，積分が収束しなくても Q はつねに生成子としての意味をもつ．というのは

$$\int d^3x [J^0(x), \varphi_\alpha(y)]_* \qquad (3.26)$$

のように，$J^0(x)$ と $\varphi_\alpha(y)$ との超交換関係を積分より先に計算することにすれば，場の演算子の局所性により x 積分の遠方からの寄与は全く問題にならないからである．このことは，生成子としては Q に任意の表面積分をつけ加えてもよいことを意味する．

場の演算子 $\varphi_\alpha(x)$ から作られたある局所的な量 $\chi(x)$ が存在して

$$\langle 0|[Q, \chi(y)]_*|0\rangle \neq 0 \qquad (3.27)$$

となる場合，Q は自発的に破れた対称性（spontaneously broken symmetry）であるという．これは，真空 $|0\rangle$ が Q の固有状態でありえないことを意味するからである．しかし Q の積分が収束しないときには，もともと固有状態を考えるわけにはいかないから，後者の解釈よりも式（3.27）自身を自発的対称性の破れの定義とするのが正当である．

式（3.27）が成立するとき，$\chi(x)$ は質量ゼロのスペクトルを含まなければならないことが証明される．それをゴールドストーンの定理（Goldstone theorem）といい，この質量ゼロの粒子をゴールドストーン粒子あるいは南部－ゴールドストーン粒子（Nambu-Goldstone particle）と呼ぶ．ゴールドストーン粒子のスピンは，Q がローレンツ不変な対称性ならば必ずゼロである．

なお，Q の積分の収束性（これは付加する表面積分項にも依存）と，Q の対称性が自発的に破れているかどうかということとは，別個のことがらである．通常，自発的対称性の破れがあれば $Q|0\rangle$ が定義できないと考えるのは，$\langle 0|Q\cdot$

$Q|0\rangle$ が式（3.25）と並進不変性により有限の値になりえないからであろう．しかし次章で述べるように不定計量の理論を考えれば，それがゼロであってよく，$Q|0\rangle$ が存在しても少しも不都合は生じない．なお，P_μ および $M_{\mu\nu}$ と可換な内部対称性 Q が自発的に破れているとき，$Q|0\rangle$ は $|0\rangle$ とは独立なポアンカレ不変な状態ベクトルの例を提供する．

4章　不定計量

4·1　不定計量のヒルベルト空間

場の量子論の伝統的な枠組みでは，状態ベクトルの空間はヒルベルト空間である．実際，公理論的場の量子論ではこれを公理として採用する．状態ベクトル $|a\rangle$ の自分自身との内積 $\langle a|a\rangle$ は，物理用語でノルム (norm) と呼ばれる．ヒルベルト空間では，$|a\rangle \neq 0$ なる限りノルムは必ず正である．これを計量の正定値性 (positivity) という．このことは，量子力学でのシュレディンガーの波動関数からひき継いだことであって，確率解釈の基礎になっている．すなわち，S 行列のユニタリ性はこの計量の正定値性に基づいている．

しかしながら，状態ベクトルの線形性という観点からすると，計量の正定値性は異質的な要請である．たとえば，自由場の量子論を正定値計量で構成したとしても，それに相互作用を導入し，結合定数の値をどんどん大きくしていったとき，計量の正定値性が保持されるという保証はどこにもない．むしろそれが破れることを支持する結果がいろいろ見つかっている．したがって，正定値性を頭から要請するのは不自然なことだといってよいであろう．

ヒルベルト空間の計量の正定値性の公理をとり除いて得られる，内積をもった無限次元線形空間を，不定計量のヒルベルト空間 (indefinite-metric Hilbert space) という．ノルム $\langle a|a\rangle$ はもちろん実数であるが，不定計量のヒルベルト空間ではそれはゼロにも負にもなりうる．

ある状態ベクトル $|c\rangle$ があって，それが任意の状態ベクトル $|a\rangle$ と直交する ($\langle a|c\rangle=0$) ならば，その空間は縮退している (degenerate) という．しかし，$|c\rangle$ のような状態ベクトルは存在してもすべて無視していっこうに差し支

えないから，一般性を失うことなしに縮退していない空間を考えてよい．それゆえ，以下ではつねに縮退していない不定計量のヒルベルト空間を考え，それを $\mathcal{V}$ と書く．$\mathcal{V}$ では $|a\rangle$ のノルムがゼロ（$\langle a|a\rangle=0$）であると，必ずある別の状態ベクトル $|b\rangle$ が存在して $\langle b|a\rangle\neq 0$ となる．このとき $|a\rangle$ と $|b\rangle$ の一次結合 $|a\rangle+\lambda|b\rangle$ のノルムは，複素数 λ の選び方によって必ず正にも負にもできる．

量子論の確率解釈によれば，ノルムは確率と結びついているので，負ノルムの状態ベクトルへの遷移が起こると，そのような理論は物理として意味をなさない．ゼロノルムの状態ベクトルは，それ自身では直接確率解釈に困難をひき起こさないが，上に述べたように必ず潜在的に負ノルムの状態ベクトルを作り出す．このように確率解釈を危うくする状態ベクトルのことを，一般にゴースト（ghost）あるいはお化けと呼ぶ．

4·2 補助条件

お化けの出現による確率解釈の困難から逃れるほとんど唯一の合理的な方法は，補助条件（subsidiary condition）を導入する方法である．

補助条件は次の三つの要請を満たしていなければならない．

i）状態ベクトルに関して線形である．

ii）ハイゼンベルク描像において時間に依存しない．

iii）負ノルムの状態ベクトルを完全に排除する．

要請 i）により，補助条件を満たす状態ベクトルの全体は，$\mathcal{V}$ の部分空間をなす．これを物理的部分空間（physical subspace）と呼び，$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ と書く．そしてわれわれが現実に用意したり観測したりできるのは，$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ に属する状態ベクトルだけであるものと仮定する．$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ に属する状態ベクトルを物理的(physical)，そうでないものを非物理的（unphysical）という．

$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ は要請 ii）により時間に依存しないが，理論がポアンカレ不変であるためにはさらにポアンカレ不変な部分空間であるべきである．つまり，$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ は P_μ と $M_{\mu\nu}$ の不変部分空間（invariant subspace）であるとすべきである．

要請 iii）により，$\mathcal{V}_{\rm phys}$ は負ノルムの状態ベクトルを全く含まない．つまり，正ノルムのものとゼロノルムのものとより成る．通常，$\mathcal{V}_{\rm phys}$ はゼロノルムの状態ベクトルを含んでいる．なぜなら，もしそうでなければ，はじめから $\mathcal{V}_{\rm phys}$ に話を限ってしまうと，正定値計量の空間で理論が構成できるはずだからである．正ノルムとゼロノルムの状態ベクトルだけから成る空間は，半正定値計量（positive semi-definite metric）をもつといわれる．これは縮退した空間であるが，$\mathcal{V}$ の部分空間であるので，ゼロノルムの部分を勝手に捨ててしまうことはできない．縮退した部分空間については，直交補空間（orthogonal complement）が存在しないので注意を要する．

$\mathcal{V}_{\rm phys}$ の中でゼロノルムの状態ベクトルの全体を $\mathcal{V}_0$ と書く．$\mathcal{V}_0$ は部分空間である．なぜなら，もしある $|a\rangle$, $|b\rangle\in\mathcal{V}_0$ の一次結合 $\alpha|a\rangle+\beta|b\rangle$ がゼロノルムでなかったならば，$\mathcal{V}_{\rm phys}$ に属することからそれは正ノルムのはずだが，そのとき $\alpha|a\rangle-\beta|b\rangle$ のノルムが負になるので矛盾である．

$\mathcal{V}_{\rm phys}$ の状態ベクトルについて，$\mathcal{V}_0$ の状態ベクトルだけの差を度外視して得られる空間，すなわち商空間（quotient space）$\mathcal{H}_{\rm phys}\equiv\mathcal{V}_{\rm phys}/\mathcal{V}_0$ は，正定値計量をもつ．$\mathcal{H}_{\rm phys}$ の各ベクトルには，$\mathcal{V}_{\rm phys}$ の無限個の状態ベクトルが対応するが，それらの差はつねにゼロノルムをもつ．そこで代表として一つだけ正ノルムの状態ベクトルを選び，それらの全体が一つの部分空間をなすようにする．この部分空間のとり方はもちろん一意的ではないが，その一つを $\mathcal{V}_+$ と書く．このとき

$$\mathcal{V}_{\rm phys}=\mathcal{V}_+\oplus\mathcal{V}_0 \tag{4.1}$$

である．ただし $\oplus$ は直和を表す．$\mathcal{V}_+$ は縮退していないから直交補空間をもち，したがって $\mathcal{V}_+$ への直交射影演算子（orthogonal projection operator）が存在する．これを P とすると

$$P\mathcal{V}=\mathcal{V}_+,\quad P^2=P,\quad P^\dagger=P \tag{4.2}$$

である．ここに † はエルミート共役を表す．

$|a\rangle\in\mathcal{V}_{\rm phys}$ ならば，式（4.1）と（4.2）から明らかに

$$(1-P)|a\rangle\in\mathcal{V}_0 \tag{4.3}$$

である．また，$|c\rangle \in \mathcal{V}_0$ ならば，任意の $|b\rangle \in \mathcal{V}_{\rm phys}$ に対しつねに

$$\langle b|c\rangle = 0 \tag{4.4}$$

である．これは，$|b\rangle + \lambda|c\rangle$ のノルムが非負，すなわち λ の任意の複素数値に対し，$\langle b|b\rangle + 2{\rm Re}\lambda\langle b|c\rangle$ が負にならないことからの帰結である．式 (4.3) と (4.4) から，任意の $|a\rangle$, $|b\rangle \in \mathcal{V}_{\rm phys}$ に対し

$$\langle b|(1-P)|a\rangle = 0 \tag{4.5}$$

となる．これは

$$\langle b|a\rangle = \langle b|P|a\rangle \tag{4.6}$$

と書き換えられる．つまり，$|a\rangle$ と $|b\rangle$ が物理的ならば，その内積には無条件に P を挿入できることになる．これは非常に基本的な結果である．

4·3　物理的S行列のユニタリ性

$\mathcal{V}$ 上で構成されたS行列を S とする．全ハミルトニアン H は不定計量の意味でエルミートであるから，S は不定計量の意味でユニタリ，すなわち

$$S^\dagger S = SS^\dagger = 1 \tag{4.7}$$

である．これは負ノルムの状態ベクトルをも含めてのユニタリ性であって，確率解釈を許す真のユニタリ性ではない．

物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\rm phys}$ は H により不変，したがって S についても不変である．すなわち $|c\rangle \in \mathcal{V}_{\rm phys}$ ならば

$$S|c\rangle \in \mathcal{V}_{\rm phys} \tag{4.8}$$

である．それゆえ，任意の $|a\rangle \in \mathcal{V}$ に対し

$$SP|a\rangle \in \mathcal{V}_{\rm phys} \tag{4.9}$$

となる．そこで式 (4.6) を使うと，全く任意な $|a\rangle$, $|b\rangle$ に対し

$$\langle b|PS^\dagger \cdot P \cdot SP|a\rangle = \langle b|PS^\dagger SP|a\rangle = \langle b|P|a\rangle \tag{4.10}$$

である．ゆえに

$$(PSP)^\dagger(PSP) = P \tag{4.11}$$

を得る．ダガーのあるなしを逆順にした場合についても全く同様である．したがって，S を $\mathcal{V}_+$ に制限したものは，$\mathcal{V}_+$ 内でユニタリ，すなわち真にユニ

タリである．この事実は $\mathcal{V}_+$ を定義する代表の状態ベクトルの選び方に全くよらないから，$\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ 上でユニタリであるということができる．

このようにして，i)，ii)，iii) という三つの要請を満たす補助条件が存在すれば，それによって定義される物理的部分空間 $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ にS行列を制限して得られる物理的 S 行列 (physical S-matrix) は，ゼロノルムの状態ベクトルを度外視すると真の意味でユニタリであることがわかる．すなわち，補助条件が見つかりさえすれば，不定計量の理論であっても確率解釈可能である．

5章　電磁場の共変的正準量子論

5·1　ゲージ不変性

一般相対論は，一般座標変換という任意関数を含む変換のもとに不変になっている．ゲージ理論も任意関数を含む局所ゲージ変換（local gauge transformation）のもとに不変であるので，重力場の量子化を考える前にまずゲージ場の量子化から考えるのが順序である．

ゲージ理論は，内部対称性を各時空点ごとのそれに拡張することによって得られる理論である．変換が時空点に依存すると ∂_μ と可換でなくなるので，そのおつりを消すためにゲージ場（gauge field）と呼ばれるベクトル場が導入される．考えている内部対称性が可換群の場合は可換ゲージ場（abelian gauge field），非可換群の場合は非可換ゲージ場（non-abelian gauge field）あるいはヤン-ミルズ場と呼ばれる．

本章では，可換ゲージ場の共変的正準量子論について述べる．内部対称性は通常コンパクトな群であるので，可換ゲージ理論では対称性は $U(1)$ である．可換ゲージ場のプロトタイプは電磁場であり，現実の電磁場に対応させられないような場合でも電磁場と呼ぶことが多い．

電磁場 $A_\mu(x)$ は局所ゲージ変換のもとで

$$A_\mu(x) \longmapsto A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \tag{5.1}$$

という特殊な変換をうける．ここに $\Lambda(x)$ は時空 x^μ の任意関数である．場の強さ

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu} \tag{5.2}$$

はゲージ不変量である．電磁場の古典論のラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{EM}} \equiv -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{5.3}$$

である．もちろんこれに荷電場のラグランジアン密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{M/EM}}$ がつけ加わる．ただしその中に含まれる ∂_μ は，電荷 q をもつ場に対してそれぞれ共変微分 $\partial_\mu - iqA_\mu$ におきかえるものとする．

5・2 B 場 形 式

$\mathscr{L}_{\mathrm{EM}}$ はゲージ不変量であるので，このままでは量子化できない．式 (5.3) は式 (5.1) の自由度を規制する内容を含んでいないからである．それゆえ，ゲージ固定 (gauge fixing) を行わなければならない．クーロン・ゲージのように時間微分を含まないゲージ条件を課す場合には，ラグランジアン密度 (5.3) に直接ふれずにあとから設定することも可能であるが，時間微分を含むゲージ条件を課す場合には，系のダイナミックスが関係してくるのでそれは許されない．

ゲージ条件も場に対する方程式であってみれば，変分原理によって導かれるのが自然である．そのためには，ラグランジアン密度に新しい場 $B(x)$ を導入することが必要である．ゲージ条件を導く場を新たに導入する形式を，一般にB場形式[15) (B-field formalism) と呼ぶ．共変なゲージ条件の場合を考えるので，$B(x)$ はスカラー場でなくてはならない．

B に関する変分は A_μ に対するゲージ条件を生むのであって，B 自身に対する場の方程式を生むのではないから，ラグランジアン密度は B を独立な力学変数にするような項を含んでいてはならない．結局，線形な共変ゲージ条件を生ずるものとして，ゲージ固定項

$$\mathscr{L}_{\mathrm{GF/EM}} \equiv -A^\mu \partial_\mu B + \frac{1}{2}\alpha B^2 \tag{5.4}$$

を添加する．つまり，共変的量子論のラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QED}} \equiv \mathscr{L}_{\mathrm{EM}} + \mathscr{L}_{\mathrm{GF/EM}} + \mathscr{L}_{\mathrm{M/EM}} \tag{5.5}$$

となるのである．

式 (5.4) において α は任意の実数で，ゲージ・パラメーター (gauge para-

meter）と呼ばれる．$\alpha=0$ の場合がとくに重要であり，ランダウ・ゲージ (Landau gauge) と称する．ランダウ・ゲージ以外ではB場を消去することが可能である．

式 (5.5) から導かれる場の方程式は

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}+\partial_\mu B=-j_\mu \tag{5.6}$$

$$\partial^\mu A_\mu+\alpha B=0 \tag{5.7}$$

および荷電場に対するものである．ただし j_μ は電流であって，保存則

$$\partial^\mu j_\mu=0 \tag{5.8}$$

を満たす．

古典論のマックスウェル方程式とちがって，量子マックスウェル方程式 (5.6) は $\partial_\mu B$ という項を含んでいる．したがって，両辺の ∂^μ をとると，恒等式 $0=0$ が得られるのではなく，方程式

$$\partial^\mu\partial_\mu B=0 \tag{5.9}$$

が得られることになる．つまり B は，A_μ が相互作用をしていても自由場の方程式を満足している．このことは可換ゲージ場の，しかも線形なゲージ条件を採った場合の特徴であって，一般の場合には成立しないことである．

正準量子化は，部分積分して $\mathscr{L}_{\mathrm{GF/EM}}$ の代わりに

$$\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{GF/EM}}\equiv\partial^\mu A_\mu\cdot B+\frac{1}{2}\alpha B^2 \tag{5.10}$$

を用いて行う．このような部分積分は，ディラック場や重力場の場合にも必要であり，B場形式に特有なことではない．正準量としては A_μ の各成分と荷電場を採り，B は正準量としない．この点を除いては，3章の正準量子化に関する一般論をすべてそのまま適用する．$\mathscr{L}_{\mathrm{EM}}$ は $\dot{A}_0$ を含まないので，古典論では A_0 の正準共役量が存在しなかったが，量子論では $\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{GF/EM}}$ が $\dot{A}_0$ を含むので存在し，正準量子化が困難なく遂行される．A_0 の正準共役量は B そのもので，したがって A_0 と B は同時刻で非可換である．

B場形式では，場の方程式とハイゼンベルク方程式の同等性は，B場についての変分から得られるゲージ条件の式を前提として，一般的に証明される．ゲージ条件の式自身は，B場を共役量にもつ正準量のハイゼンベルク方程式と同

等である．このように，B場形式ではラグランジュ形式とハミルトン形式との間の無矛盾性がつねに保証されている．拘束条件のある場合に対するディラックの量子化法[16]では，このことは必ずしも明らかでないことに注意すべきである．

5・3 電磁場の補助条件

A_μ はベクトル場であるので，共変的量子論では，自由場の4次元交換関係は $\eta_{\mu\nu}$ に比例する項と $\partial_\mu\partial_\nu$ に比例する項とから成るはずである．ところが，後者は $[F_{\mu\lambda}, F_{\nu\rho}]$ にはきかないゲージ変換の自由度に相当する部分であるから，物理的に意味のある理論である限り，$\eta_{\mu\nu}$ に比例する項が必ず存在していなければならない．そうすると，A_0 の交換関係は A_k のそれと逆符号であるから，どうしても負ノルムの状態ベクトルの存在を認めなければならない．つまり電磁場の量子化には，不定計量のヒルベルト空間が必要である．相互作用があっても以上の事情から逃れられないことは，漸近場について考えれば明らかであろう．

そこで確率解釈可能な理論にするためには，補助条件を導入しなければならない．式 (5.9) のように，$B(x)$ は自由場の方程式を満足するから，系の時間的発展に矛盾することなくその消滅演算子 $B^{(+)}(x)$ を定義できる．そこで補助条件として

$$B^{(+)}(x)|f\rangle=0 \tag{5..11}$$

を設定する．これはグプタによって与えられた補助条件をB場形式に拡張したものである．

式 (5.11) の代わりに，$B(x)|f\rangle=0$ のような局所的な補助条件を設定するわけにはいかないことに注意しておこう．Bは生成演算子の部分をも含んでいるから，この条件は真空をも排除してしまう．さらに A_μ と B との交換子はゼロでないc数なので，物理的な状態ベクトルはすべてゼロノルムというばかげたことになってしまう．

式 (5.11) が補助条件の満たすべき三つの要請を満足していることをチェッ

クしておかなければならない．このうち i) は自明で，ii) も運動量表示で書いてみれば明らかである．実際，式 (5.11) がポアンカレ不変な定義であることはすぐ確かめられる．iii) は，$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ が時間に存在しないことに注意して，漸近的完全性の仮定のもとに，漸近場のフォック空間において証明すればよい．

漸近場のフォック空間では，電磁場に関する独立なモードとして，横波光子2成分，縦波光子，B場の量子の四つがある．このうち縦波光子だけが補助条件 (5.11) を満たさないので，横波光子とB場の量子と荷電場の粒子とから生成される部分フォック空間が $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ である．横波光子と荷電粒子とは正定値計量をもつはずである．これに対し，B場の量子はゼロノルムをもつ．このようにして $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ が半正定値計量をもつことが示されるのである．

なお，クーロン力は縦波光子とB場の量子との協力によって伝達される．クーロン力の量子といったものが決して観測されないのは，$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ に属するB場の量子がゼロノルムだからである．

5·4 電荷演算子

式 (5.6) が古典論のマックスウェル方程式と異なり，$\partial_\mu B$ という余分の項を含んでいることの重要性を指摘しておこう．

式 (5.6) の $\mu=0$ 成分を空間積分すると*

$$Q \equiv \int d^3x j_0(x) = -\int d^3x \partial^k F_{0k}(x) - \int d^3x \partial_0 B(x) \tag{5.12}$$

となる．電荷演算子 Q は $U(1)$ の生成子であるから，荷電場 $\phi(y)$ との交換関係は $\phi(y)$ に比例し，もちろん電荷がゼロでない限りゼロではない．ところが，式 (5.12) の右辺の第1項はガウスの定理により空間無限遠方だけの表面積分になるから，局所性によりこの項は $\phi(y)$ とは可換である．したがって，もし式 (5.6) において $\partial_\mu B$ の項がなかったならば，明らかな矛盾を生ずるわけである．

他方，$\partial_\mu B$ は，式 (5.11) と $B=B^{(+)}+(B^{(+)})^\dagger$ により，物理的な状態ベク

* やかましくいえば，くりこんだ式について考察すべきである．

トルではさめばゼロになる．とくに式 (5.12) の第2項は $\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ ではきかない．それゆえ物理的に電荷として意味をもつ量は，式 (5.12) の第1項からでてこなくてはならない．つまり，Q の固有値に関することは第1項が引き受け，Q の $U(1)$ 生成子としての役割は第2項が果たしているという，巧妙な分業が行われているのである．

ゲージ固定項 (5.4) の導入により局所ゲージ変換 (5.1) は完全にやれなくなったわけではなく，$\partial^\mu\partial_\mu\Lambda=0$ を満たす c 数関数 $\Lambda(x)$ でのそれに関する不変性は保たれている．たとえば Λ が x^ν であるときの対称性の生成子は

$$Q^\nu\equiv\int d^3x(x^\nu\partial_0 B-\delta_0{}^\nu B) \tag{5.13}$$

で与えられる．交換関係を計算すると

$$[Q^\nu, A_\mu(y)]=-i\delta_\mu{}^\nu \tag{5.14}$$

となるので，$\langle 0|[Q^\nu, A_\mu]|0\rangle$ はゼロではありえない．すなわち Q^ν は自発的に破れている．そしてそのゴールドストーン粒子は A_μ の粒子である．このようにして，光子の質量が正確にゼロでなければならないことが証明される*.

対称性の自発的破れは，物性論においてのように実効ポテンシャルの最低エネルギー状態が非対称なものになることによって生ずると信じている人が多いが，場の量子論ではこの例で見られるように自動的に起こることがしばしばあるのを忘れてはならない．

---

* ヒッグス現象 (Higgs phenomenon) が起こる場合には，ゴールドストーン・スカラー場の微分が代役を勤める[17].

6章　ヤン-ミルズ場の共変的正準量子論

6·1　ヤン－ミルズ理論の構成

内部対称性が非可換リー群である場合のゲージ場が，ヤン-ミルズ場 $A_\mu{}^a(x)$ $(a=1,2,\cdots,N)$ である．通常コンパクト半単純リー群（compact semisimple Lie group）の場合を考える．無限小変換だけに話を限って十分なので，リー代数のみを考察すればよい．

変換の生成子を Q^a，構造定数（structure constant）を f^{abc} とすれば，リー代数は

$$[Q^a, Q^b]=if^{abc}Q^c \tag{6.1}$$

によって記述される．ここに f^{abc} は実数で，$a\leftrightarrow b\leftrightarrow c$ につき完全反対称で，ヤコービ恒等式を満足する．

$A_\mu{}^a$ は無限小局所ゲージ変換に対し

$$A_\mu{}^a\longmapsto A_\mu{}^a+D_\mu{}^{ab}\Lambda^b \tag{6.2}$$

のように変換する．ここに Λ^b は無限小の任意関数，$D_\mu{}^{ab}$ は共変微分

$$D_\mu{}^{ab}\equiv\delta^{ab}\partial_\mu+gf^{acb}A_\mu{}^c \tag{6.3}$$

である（g は結合定数）．

場の強さに相当する量は

$$F_{\mu\nu}{}^a\equiv\partial_\mu A_\nu{}^a-\partial_\nu A_\mu{}^a+gf^{abc}A_\mu{}^bA_\nu{}^c=-F_{\nu\mu}{}^a \tag{6.4}$$

で与えられる．しかし，$F_{\mu\nu}{}^a$ は電磁場の $F_{\mu\nu}$ と異なり，ゲージ不変量ではない．添字 a をもつことからわかるようにゲージ共変であって，a についての縮約をとるとはじめてゲージ不変量が得られる．

ヤン－ミルズ場の古典論のラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{YM}} \equiv -\frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}{}^{a} \tag{6.5}$$

に物質場のラグランジアン密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{M/YM}}$ をつけ加えたものである．ただし，$\mathscr{L}_{\mathrm{M/YM}}$ の中に含まれる ∂_μ はすべて，それが作用する場のリー代数の表現に応じた共変微分におきかえるものとする．

共変的正準量子論を構成するには，まず式 (5.4) と同じようにゲージ固定項

$$\mathscr{L}_{\mathrm{GF/YM}} \equiv -A^{\mu a} \partial_\mu B^a + \frac{1}{2} \alpha B^a B^a \tag{6.6}$$

を導入する．しかしながら，B^a はゲージ不変でなくゲージ共変であるから，それ自身が源となり，自由場の方程式を満たさない．これは，式 (6.5) と (6.4) から見られるヤン－ミルズ場の本質的非線形性の現れである．このような事情のため，ヤン－ミルズ理論では式 (5.11) のような形の補助条件を設定することはできない．

ヤン－ミルズ場の量子論の物理的 S 行列を電磁場の場合からの類推でもって定義すると，それはユニタリ性を満たさないことが摂動論で直接確かめられる．ファインマン[18] とド・ウィット[19] はこの困難を解決する処方箋を与えた．それによれば，新たに一対のフェルミ統計に従う質量ゼロの仮想的なスカラー量子を導入し，それがファインマン図のループとしてだけ現れ，外線には決してでてこないものと仮定すると，ユニタリ性の困難は解消する．ファデエフとポポフ[20] は，この奇妙な規則をファインマンの経路積分法に基づいて合理的に導いたので，通常この奇妙なスカラー量子はファデエフ－ポポフのお化け (Faddeev-Popov ghost) と呼ばれている．以下ではこれを FP お化けと略記する．

正準量子論では，FP お化けは最初からその存在を仮定しておかなければならない．スカラー場がフェルミ統計に従うのはスピンと統計の関係に矛盾しているようであるが，不定計量のヒルベルト空間を用いる場合には問題ない．一対の FP お化け $C^a(x)$ と $\overline{C}^a(x)$ のそれぞれをエルミートなスカラー場とし，ヤン－ミルズ場の共変的正準量子論を正しく定式化することに成功したのは，九後と小嶋[21] である．以下，九後－小嶋形式 (Kugo－Ojima formalism)

の概要について説明する．

6·2 BRS 変換

FP お化けのラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_{\text{FP/YM}} \equiv -i\partial^{\mu}\overline{C}^{a} \cdot D_{\mu}{}^{ab}C^{b} \tag{6.7}$$

で，ヤン－ミルズ場の量子論の全ラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_{\text{QCD}} \equiv \mathscr{L}_{\text{YM}} + \mathscr{L}_{\text{GF/YM}} + \mathscr{L}_{\text{FP/YM}} + \mathscr{L}_{\text{M/YM}} \tag{6.8}$$

となる．この $\mathscr{L}_{\text{QCD}}$ はもちろん局所ゲージ不変ではないが，その代わりベッキ，ルーエ，ストラの３人組によって発見された BRS 変換[22] (BRS transformation) と呼ばれる新しいタイプの変換に対し不変になっている．

場 $\varphi(x)$ の BRS 変換を $\boldsymbol{\delta}(\varphi)$ と書く．$\varphi(x)$ が古典論においても存在した場のときには，その無限小局所ゲージ変換の変化部分の $\Lambda^{a}(x)$ を FP お化けの一方 $C^{a}(x)$ によりおきかえたもので $\boldsymbol{\delta}(\varphi)$ を定義する．たとえば式 (6.2) から

$$\boldsymbol{\delta}(A_{\mu}{}^{a}) = D_{\mu}{}^{ab}C^{b} \tag{6.9}$$

である．$C^{a}, \overline{C}^{a}, B^{a}$ については次のように定義する．

$$\boldsymbol{\delta}(C^{a}) = -\frac{1}{2}gf^{abc}C^{b}C^{c} \tag{6.10}$$

$$\boldsymbol{\delta}(\overline{C}^{a}) = iB^{a}, \quad \boldsymbol{\delta}(B^{a}) = 0 \tag{6.11}$$

上に見られるように，BRS 変換は通常の変換とは異なり，ボゾンをフェルミオンに，フェルミオンをボゾンに変えるいわゆる超変換(super-transformation) の一種であるが，スピンを変えない．BRS 変換を無理に連続的変換の形に書こうとして反可換な c 数すなわちグラスマン数 (Grassmann number) を用いる人が多いが，これは正準量子論では全く無益なことである．

演算 $\boldsymbol{\delta}$ は線形で，かつ反交換的なライプニッツの規則

$$\boldsymbol{\delta}(\Phi_{1}\Phi_{2}) = \boldsymbol{\delta}(\Phi_{1})\Phi_{2} + \epsilon(\Phi_{1})\Phi_{1}\boldsymbol{\delta}(\Phi_{2}) \tag{6.12}$$

を満たすものとする．ここに $\epsilon(\Phi)$ は３章で導入した Φ の統計性を表す符号因子である．BRS 変換はさらに

$$\boldsymbol{\delta}(\Phi^\dagger)=\epsilon(\Phi)[\boldsymbol{\delta}(\Phi)]^\dagger \tag{6.13}$$

$$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(\Phi))=0 \tag{6.14}$$

という性質をもつ．式（6.13）はエルミート性であり，式（6.14）は冪零性（nilpotency）である．式（6.12）と（6.14）は，外微分（exterior differentiation）d の性質とよく似ているので，BRS 変換に関するコホモロジー（cohomology）を考えることもできる．

冪零性（6.14）は BRS 変換のもつ基本的に重要な特徴であって，式（6.10）は，式（6.14）のもとに，構造定数に対するヤコービの恒等式と同等であることが示される．この意味で，式（6.10）はリー代数の生成子が満たす交換関係（6.1）と等価な内容をもつ式であるといえる．

BRS 変換は局所ゲージ変換と似ているが，後者とちがって任意関数を含んでいないので，全域的（global）な変換である．それにもかかわらず，局所ゲージ変換がもたらす情報，すなわち通常ウォード－高橋の関係式（Ward-Takahashi identity）という形で表されるものはすべて，BRS 変換により統一的に再現される．つまり，BRS 変換は局所ゲージ変換の量子論版であるといえる．局所的な変換という概念は古典論に特有なものであって，量子論では全域的な変換のみが存在する．量子論では，各時空点での場の値というものは意味をもたないからである．

$\mathscr{L}_{\mathrm{YM}}$ と $\mathscr{L}_{\mathrm{M/YM}}$ は，明らかにそれぞれで BRS 不変である．他方，$\mathscr{L}_{\mathrm{GF/YM}}$ と $\mathscr{L}_{\mathrm{FP/YM}}$ とはそうはなっていない．しかし，その和は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{GF/YM}}+\mathscr{L}_{\mathrm{FP/YM}}=\boldsymbol{\delta}\left(iA^{\mu a}\partial_\mu\overline{C}^a-\frac{1}{2}i\alpha\overline{C}^aB^a\right) \tag{6.15}$$

と書けることからわかるように，BRS 不変である．一般に，古典論のラグランジアン密度との差はいつでも何らかの量の BRS 変換で書けるような量でなければならない．

6·3　九後－小嶋の補助条件

式（6.8）から導かれる場の方程式および正準量子化については，とくに新しい問題はないので省略する．重要なのは補助条件の設定である．

$\mathscr{L}_{\mathrm{QCD}}$ は BRS 不変であるので，ネーターの定理により BRS 変換のカレントが定義される．これを量子ヤン-ミルズ方程式を使って簡略化すると

$$J_{\mathrm{B}}{}^{\mu} \equiv B^a D^{\mu ab} C^b - \partial^\mu B^a \cdot C^a + \frac{1}{2} i g f^{abc} \partial^\mu \overline{C}^a \cdot C^b C^c \tag{6.16}$$

となる．これから保存量

$$Q_{\mathrm{B}} \equiv \int d^3x J_{\mathrm{B}}{}^0(x) \tag{6.17}$$

が定義される．すべての場 $\varphi(x)$ に対し

$$[Q_{\mathrm{B}}, \varphi]_* = -i\boldsymbol{\delta}(\varphi) \tag{6.18}$$

となることが，正準超交換関係を用いて示せるので，Q_{B} はたしかに BRS 変換の生成子である．Q_{B} はもちろんポアンカレ生成子 P_μ および $M_{\mu\nu}$ と可換である．さらに式 (6.13) と (6.14) に対応して

$$Q_{\mathrm{B}}{}^{\dagger} = Q_{\mathrm{B}} \tag{6.19}$$

$$\{Q_{\mathrm{B}}, Q_{\mathrm{B}}\} = 2Q_{\mathrm{B}}{}^2 = 0 \tag{6.20}$$

が成立する．

さて，ヤン-ミルズ場の共変的正準量子論の補助条件として，この Q_{B} を用いて

$$Q_{\mathrm{B}}|f\rangle = 0 \tag{6.21}$$

を設定する．これを九後-小嶋の補助条件[21]（Kugo-Ojima subsidiary condition）という*．式 (6.21) が補助条件の満たすべき要請のうち i）と ii）を満たしていることは自明である．

iii）については，前章と同様に，漸近的完全性の仮定のもとに漸近場のフォック空間で考察する．ヒッグス現象によってヤン-ミルズ場が質量を獲得する場合のほかは，赤外発散（infrared divergence）の問題が電磁場の場合よりも深刻であり，閉じ込めが起こって漸近場が存在しないという見解もあるが，ここではそういった議論には立ち入らないことにする．古典論で存在する場の

---

* 式 (6.21) がクルチとフェラリ[23]によってはじめて提起されたごとくに述べている論文があるが，これは誤りである．たしかに彼らの論文には式 (6.21) と同形の式が書かれているが，彼らはその式を物理的な状態ベクトルを定義する補助条件として書いたのではなく，漸近場のフォック空間で正定値ノルムの物理的粒子の状態ベクトルが BRS 不変なことを述べているにすぎないのである．

漸近場は，あるN個のモードを除いてはすべて正ノルム，あるいは他の補助条件によって負ノルムが排除されているとする．除外したN個のモードというのは，対称性が自発的に破れていない場合にはゲージ場の縦波成分，破れている場合にはゴールドストーン粒子であるが，一般に不定計量が必要である．その生成演算子を一般的に $\chi^{a\dagger}$ で表す．また，$B^a(x), C^a(x), \overline{C}^a(x)$ の漸近場の生成演算子をそれぞれ $\beta^{a\dagger}, \gamma^{a\dagger}, \bar{\gamma}^{a\dagger}$ と書く．このとき四つ組

$$\{\chi^{a\dagger}, \beta^{a\dagger}, \gamma^{a\dagger}, \bar{\gamma}^{a\dagger}\} \tag{6.22}$$

を九後－小嶋のカルテット（Kugo－Ojima quartet）と呼ぶ．$\gamma^{a\dagger}$ は $\chi^{a\dagger}$ の，$\beta^{a\dagger}$ は $\bar{\gamma}^{a\dagger}$ の BRS 変換になっている．

漸近場のフォック空間において，九後－小嶋のカルテットに属する粒子がn個ある部分空間への直交射影演算子を $P^{(n)}$ と書く．そうすると，$P^{(n)}$ は Q_{B} と可換で，かつ $n\geqq 1$ のときある演算子 $R^{(n-1)}$ が存在して

$$P^{(n)}=\{Q_{\mathrm{B}}, R^{(n-1)}\} \tag{6.23}$$

と書けることが，nに関する数学的帰納法を用いて同時に証明できる．

そこで，式 (6.21) を満たす任意の物理的な状態ベクトル $|f\rangle$ に対し

$$\begin{aligned}\langle f|f\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}\langle f|P^{(n)}|f\rangle \\ &=\langle f|P^{(0)}|f\rangle+\sum_{n=1}^{\infty}\langle f|\{Q_{\mathrm{B}}, R^{(n-1)}\}|f\rangle \\ &=\langle f|P^{(0)}|f\rangle\end{aligned} \tag{6.24}$$

を得る．ただし，2段目で式 (6.23) を，3段目で式 (6.19) と (6.21) を用いた．$P^{(0)}$ はお化けを含まない部分への直交射影演算子だから $P^{(0)}|f\rangle$ のノルムは負にならないはずである．したがって

$$\langle f|f\rangle\geqq 0 \tag{6.25}$$

となる．すなわち，$\mathcal{V}_{\mathrm{phys}}$ の計量が半正定値であることが示された．

以上の証明を，同じことではあるが，次のように書き直してみるとその意味がわかりやすい．式 (6.21) を満たす $|f\rangle$ に対し，式 (6.23) から $n\geqq 1$ のとき

$$P^{(n)}|f\rangle=Q_{\mathrm{B}}R^{(n-1)}|f\rangle \tag{6.26}$$

であるから

$$|h\rangle \equiv \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n-1)}|f\rangle \tag{6.27}$$

とおけば

$$(1-P^{(0)})|f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}|f\rangle = Q_B|h\rangle \tag{6.28}$$

となる．したがって，$(1-P^{(0)})|f\rangle$ のノルムは式 (6.20) によりゼロである．式 (6.28) のように書いてみると，九後‐小嶋のカルテットがゲージの自由度を表していることがよくわかる．

九後‐小嶋の補助条件 (6.21) が，電磁場の場合の補助条件 (5.11) と異なり，x^μ を全く含まない正真正銘ただ1個の条件式であることは驚くべきことである．非可換ゲージ場は $f^{abc}=0$ とおくと可換ゲージ場になるので，前者が後者よりも簡単になることはありえないはずである．このパラドックスの原因は，電磁場の場合に FP お化けを導入しなかったことによる．つまり可換ゲージ場の場合でも式 (6.7) により $\mathscr{L}_{\mathrm{FP/EM}}$ を導入すると，共変微分は ∂_μ になるので FP お化けは全く相互作用しない．それゆえ FP お化けの非存在を表す補助条件 $\overline{C}^{(+)}(x)|f\rangle=0$ を付加することが可能である．これと式 (6.21) とを組み合わして FP お化けを消去すれば，式 (5.11) が再現されるのである．

以上のように，FP お化けはゲージ場の量子論において極めて本質的な役割を演ずる BRS 変換の基礎となるものである．FP お化けが直接物理的な量に顔を出さないからといって，それをいつまでも“仮想的なもの”と考えるのは，正しい考え方とはいえないであろう．量子力学において，シュレディンガーの波動関数は，古典論における対応物を全くもたず，かつハイゼンベルクの行列力学では全くそれを用いずに定式化されるが，今日シュレディンガーの波動関数を仮想的なものと考える人はいないであろう．それと同様に，FP お化けも古典的な対応物を全くもたず，かつファインマンの経路積分法でははじめからラグランジアン密度に入れておかなくてもよいものであるが，FP お化けはゲージ場の量子論において基本的に重要な存在であり，決して他の場と差別待遇されるべきものではないであろう．

7章　重力場の量子論の構成

7·1　一般座標変換に対応する BRS 変換

以上を予備知識として，以下本題の重力場の共変的正準量子論について述べる．

一般相対論は一般座標変換に対して不変であるから，そのままでは量子化できない．一般相対論の正準量子化を行う最も合理的な方法は，ヤン－ミルズ場の共変的正準量子論の場合と同じく，古典論のラグランジアン密度にB場を含むゲージ固定項と，全体の BRS 不変性を保証するように FP お化けの項をつけ加えることである．BRS 不変なように構成しておけば，九後－小嶋の補助条件を設定することにより，物理的S行列のユニタリ性が保証される．ただし重力場の量子論では，ゲージ場の場合とちがって，B場も FP お化けもベクトル場になる．重力場が $g_{\mu\nu}$ のように小文字で書かれているのにそろえて，B場を b_ρ, FP お化けを $c^\sigma, \bar{c}_\tau$ のように小文字で表す．FP お化けはもちろんフェルミ統計に従う．

まず，一般座標変換に対応する BRS 変換を導入する[24]．一般座標変換は，今まで考えた局所ゲージ変換とは異なり，時空に関する変換であるので新しい事情が生ずる．それは，場だけでなく場の座標変数もまた変換されるということである．式 (2.6)−(2.8) の無限小変換 $x'^\nu=x^\nu+\delta x^\nu$ (δx^ν は無限小の任意関数）を考えると，それぞれ

$$\delta\phi=0 \tag{7.1}$$

$$\delta A_\mu=-\partial_\mu\delta x^\nu\cdot A_\nu \tag{7.2}$$

$$\delta A^\mu=\partial_\nu\delta x^\mu\cdot A^\nu \tag{7.3}$$

となる．注意すべきは，δ と ∂_μ とが非可換であることであって，一般に

$$\delta\partial_\mu=\partial_\mu\delta-\partial_\mu\delta x^\nu\cdot\partial_\nu \tag{7.4}$$

という関係が成り立つ．

BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}$ は，δx^ν を FP お化け $c^\nu(x)$ におきかえることによって導入される．このさい次元をそろえるために係数 κ を挿入しておく．すなわち*

$$\boldsymbol{\delta}(\phi)=0 \tag{7.5}$$

$$\boldsymbol{\delta}(A_\mu)=-\kappa\partial_\mu c^\nu\cdot A_\nu \tag{7.6}$$

$$\boldsymbol{\delta}(A^\mu)=\kappa\partial_\nu c^\mu\cdot A^\nu \tag{7.7}$$

とする．一般のテンソルについては，それぞれの添字についての寄与を加え合わせればよい．たとえば

$$\boldsymbol{\delta}(g_{\mu\nu})=-\kappa(\partial_\mu c^\rho\cdot g_{\rho\nu}+\partial_\nu c^\rho\cdot g_{\mu\rho}) \tag{7.8}$$

である．式 (7.4) に対応して，任意の量 $\boldsymbol{\Phi}$ に対し

$$\boldsymbol{\delta}(\partial_\mu\boldsymbol{\Phi})=\partial_\mu\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\Phi})-\kappa\partial_\mu c^\nu\cdot\partial_\nu\boldsymbol{\Phi} \tag{7.9}$$

が成立するものとする．これと式 (6.12) を使えば，$\boldsymbol{\delta}(\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda)$, $\boldsymbol{\delta}(h)$, $\boldsymbol{\delta}(R_{\mu\nu})$ などがすべて計算できる．

上記の BRS 変換の導入から明らかなように[25)]

$$\boldsymbol{\delta}(x^\mu)=\kappa c^\mu \tag{7.10}$$

であるから，$\boldsymbol{\delta}$ の冪零性により

$$\boldsymbol{\delta}(c^\mu)=0 \tag{7.11}$$

でなければならない．これは，一般座標変換が並進を局所化して得られるものであることを示す重要な式である．並進群は可換群であるから，式 (6.10) の $f^{abc}=0$ の場合に対応するのである．だから，重力理論の複雑さはすべて式 (7.9) に起因するのだといえる．

B場 $b_\rho(x)$ と，もう一方の FP お化け $\bar{c}_\tau(x)$ の BRS 変換は，式 (6.11) と同様に

$$\boldsymbol{\delta}(\bar{c}_\rho)=ib_\rho,\quad \boldsymbol{\delta}(b_\rho)=0 \tag{7.12}$$

---

* 原論文の $\boldsymbol{\delta}$ の定義とは符号を逆にしてある．またそれに応じてあとからでてくる $\bar{c}_\tau$ の符号も逆にしてある．

とする．

以上のように定義された $\boldsymbol{\delta}$ は，もちろん BRS 変換の性質 (6.13) と (6.14) をもつことが確かめられる．なお，式 (7.10)—(7.12) から，時空座標 x^μ と，三つの場 $b_\rho(x), c^\sigma(x), \bar{c}_\tau(x)$ は，九後-小嶋のカルテット (6.22) と似たカルテットを作っていることがわかる．このことはあとで重要になる．

7·2　重力場の量子論のラグランジアン密度

まず，ゲージ固定項 $\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}$ の選定を考える．これは，$g_{\mu\nu}$ と b_ρ だけで書け，一般座標変換に対する不変性を破り，正準量子化を可能にするようにしなければならないことはもちろんである．しかし，これだけの要請では $\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}$ の形は決められない．そこで，一般線形変換 (general linear transformation) に対してスカラー密度であることを要請すると，係数を適当にとって[24)]

$$\mathscr{L}_{\mathrm{GF}} \equiv -\kappa^{-1}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu b_\nu \tag{7.13}$$

と決定される．ただし $\tilde{g}^{\mu\nu}$ は式 (2.9) で定義される．

ここでローレンツ不変性よりも強い一般線形不変性 ($GL(4)$ 不変性) を要請したことは，きわめて重要である．3 章で述べたように，通常の場の量子論ではローレンツ不変性が第一原理として要請され，重力場の量子化においても，ファインマンの経路積分法では無批判にローレンツ不変性の要請だけでゲージ固定がなされている．しかし，重力場の理論では頭から $\eta_{\mu\nu}$ というミンコフスキー計量をもちこむのは，きわめて人為的である．たとえばローレンツ不変性だけでは，式 (7.13) の $\tilde{g}^{\mu\nu}$ の代わりに $g^{\mu\nu}$ や $\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}g_{\lambda\rho}$，あるいはそれに h の任意の冪を乗じたものを用いるのを排除する理由は何もない．

なお，$GL(4)$ 不変性が，ゲージ場の場合の α 項に対応する $\eta^{\mu\nu}b_\mu b_\nu$ に比例する項を排除するのは注目に値する．無理に $GL(4)$ 不変性の要請に従う項 $\tilde{g}^{\mu\nu}b_\mu b_\nu$ をつけ加えると，FP お化けの方にも影響を及ぼし，ラグランジアン密度を著しく複雑にしてしまう．このように，重力場の量子論ではランダウ・ゲージがユニークな存在であって，B 場形式の本質的重要性がここにおいてはじめて明らかになったといえる．

FP お化けのラグランジアン密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}$ は

$$h^{-1}(\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}+\mathscr{L}_{\mathrm{FP}})=\boldsymbol{\delta}(i\kappa^{-1}g^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{c}_\nu) \tag{7.14}$$

によって決定される．すなわち[24]

$$\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}\equiv-i\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{c}_\rho\cdot\partial_\nu c^\rho \tag{7.15}$$

である．

式 (7.15) の c^ρ にかかる微分が単純な ∂_ν であって，ヤン－ミルズ場のときの式 (6.7) のように共変微分ではないことは，きわめて重要である．これは，式 (7.11) のところで強調したように，並進が可換群であることに対応する事実なのである．

重力場は長い間，ヤン－ミルズ場に似ていると信じられてきた．実際そういう考えに沿っても FP お化けの項を導入できるのである[26]．もう一つの BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}_*$ を，式 (3.21) と同じく

$$\boldsymbol{\delta}_*(\boldsymbol{\Phi})\equiv\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\Phi})-\kappa c^\mu\partial_\mu\boldsymbol{\Phi} \tag{7.16}$$

によって導入すると，$\boldsymbol{\delta}_*$ は BRS 変換としての性質 (6.13) と (6.14) を満たし，∂_μ とは可換であって，かつ $\boldsymbol{\delta}_*(x^\mu)=0$ であることが確かめられる．さらに，式 (7.12) の代わりに

$$\boldsymbol{\delta}_*(\bar{c}_\rho)=ib_\rho,\quad \boldsymbol{\delta}_*(b_\rho)=0 \tag{7.17}$$

とおき，式 (7.13) の同じ $\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}$ に対し

$$\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}+\mathscr{L}_{*\mathrm{FP}}-\boldsymbol{\delta}_*(i\kappa^{-1}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{c}_\nu) \tag{7.18}$$

が何かの４次元発散となるように $\mathscr{L}_{*\mathrm{FP}}$ を決めると[27]

$$\mathscr{L}_{*\mathrm{FP}}\equiv-i\partial_\mu\bar{c}_\nu\cdot[\tilde{g}^{\lambda\nu}\partial_\lambda c^\mu+\tilde{g}^{\mu\lambda}\partial_\lambda c^\nu-\partial_\lambda(\tilde{g}^{\mu\nu}c^\lambda)] \tag{7.19}$$

という複雑な形になる．

同一の $\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}$ を用いているのに，FP お化けの項が $\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}$ と $\mathscr{L}_{*\mathrm{FP}}$ の２種類可能だというのは不思議な感じがするが，じつは $\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}+\mathscr{L}_{*\mathrm{FP}}$ の b_ρ を $b_\rho+i\kappa c^\lambda\partial_\lambda\bar{c}_\rho$ におきかえると，４次元発散の項を除き，$\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}+\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}$ と一致することが示せる[28]．つまり両者は等価である．

式 (7.15) の $\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}$ と式 (7.19) の $\mathscr{L}_{*\mathrm{FP}}$ とを比較すると，前者の簡明さは著しい．後者を採ることは，計算を複雑にし，見通しを悪くし，そして重力

場の量子論の本質を見失わせることになるのである．式（7.15）が示す重力場と電磁場の類似性は，声を大にして強調しなければならないことである．

7・3　場の方程式

重力場の共変的正準量子論の全ラグランジアン密度は，このようにして結局

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QG}} \equiv \mathscr{L}_{\mathrm{E}} + \mathscr{L}_{\mathrm{GF}} + \mathscr{L}_{\mathrm{FP}} + \mathscr{L}_{\mathrm{M}} \tag{7.20}$$

であることになる．ここに $\mathscr{L}_{\mathrm{E}}$ は式（2.29），$\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}$ は式（7.13），$\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}$ は式（7.15）で与えられる．

式（7.20）から導かれる場の方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - E_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} E = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{7.21}$$

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0 \tag{7.22}$$

$$\partial_\mu (\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu c^\rho) = 0 \tag{7.23}$$

$$\partial_\mu (\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{c}_\rho) = 0 \tag{7.24}$$

である．ここに

$$E_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu b_\nu + i\kappa \partial_\mu \bar{c}_\rho \cdot \partial_\nu c^\rho + (\mu \leftrightarrow \nu) \tag{7.25}$$

で，$E \equiv g^{\mu\nu} E_{\mu\nu}$ とする．記号（$\mu \leftrightarrow \nu$）は，その前の式全体の μ と ν を入れかえて得られる式を表す．

式（7.21）は古典論のアインシュタイン方程式にお化けからの寄与をつけ加えたもので，量子アインシュタイン方程式（quantum Einstein equation）と呼ぶ．式（7.22）は式（2.27）のド・ドンデアの条件にほかならない．古典論では勝手に手でつけ加える座標条件にすぎなかったが，量子論ではれっきとした場の方程式である．式（7.23）と（7.24）は，質量ゼロのスカラー場の一般共変な方程式と同形である．式（7.22）を使うと $\tilde{g}^{\mu\nu}$ を ∂_μ の外に出すこともできる．

電磁場の場合に量子マックスウェル方程式（5.6）の4次元発散をとって B に対する方程式（5.9）を得たように，量子アインシュタイン方程式（7.21）の反変成分の共変微分をとって縮約することにより，b_ρ に対する方程式が得られる．それを式（7.22）―（7.24）を用いて簡単化すると

$$\partial_\mu(\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu b_\rho)=0 \qquad (7.26)$$

という式 (7.23) や (7.24) と全く同形の方程式に帰着する．この美しい結果は，この重力場の量子論の正しさを確信させるものであった．

8章　重力場の正準量子化とテンソル的交換関係

8・1　正準量子化

正準量子化を行うために，$\mathscr{L}_{\mathrm{E}}$ を式 (2.30) の $\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{E}}$ に，また $\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}$ を部分積分して

$$\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{GF}} \equiv \kappa^{-1}\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}\cdot b_\nu \tag{8.1}$$

におきかえる．それゆえ，式 (7.20) の $\mathscr{L}_{\mathrm{QG}}$ の代わりに

$$\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{QG}} \equiv \tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{E}} + \tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{GF}} + \mathscr{L}_{\mathrm{FP}} + \mathscr{L}_{\mathrm{M}} \tag{8.2}$$

を出発点とする．

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QG}} - \tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{QG}} = \partial_\mu \mathscr{D}^\mu \tag{8.3}$$

と書くと

$$\mathscr{D}^\mu \equiv (2\kappa)^{-1}(\tilde{g}^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\lambda} - \tilde{g}^{\nu\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\mu}) - \kappa^{-1}\tilde{g}^{\mu\nu}b_\nu \tag{8.4}$$

である．

正準量子化の手続きは，3章で述べたところをそのまま適用すればよい．ただし，もちろんB場 b_ρ は正準量とはしない．$g_{\mu\nu}$ は対称テンソルであるため g_{12} と g_{21} とは独立でないが，そのように取り扱うと対角要素と非対角要素とを区別しなければならず，複雑になる．そこで $g_{\mu\nu}$ の各要素は全部独立のごとくみなして微分し，結果を対称化する．すなわち，$g_{\mu\nu}$ の正準共役量は

$$\pi^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{QG}}}{\partial \dot{g}_{\mu\nu}} + \frac{\partial \tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{QG}}}{\partial \dot{g}_{\nu\mu}}\right) \tag{8.5}$$

のように定義される．

正準量子化は，式 (3.3)—(3.5) を設定することによりなされる．ただし，このときにも $[\pi^{\rho\lambda}, g_{\mu\nu}]$ については，右辺を正しく対称化しておかなければ

ならない.

8・2　同時刻交換関係の計算

$\pi^{\rho\lambda}$ の具体的な式は複雑であるので，ここでは記載を省略するが[29]，大切なのは次の形をしていることである.

$$\pi^{0\lambda}=A^{\lambda}+B^{\lambda\rho}b_{\rho} \tag{8.6}$$

$$\pi^{kl}=J^{kl}+K^{klmn}\dot{g}_{mn}+L^{kl\rho}b_{\rho} \tag{8.7}$$

ここに $A^{\lambda}, B^{\lambda\rho}, J^{kl}, K^{klmn}, L^{kl\rho}$ はいずれも $g_{\mu\nu}$ とその空間微分だけで書ける量であって，当然 $g_{\mu\nu}$ とは同時刻で可換である．また $B^{\lambda\rho}$ は4行4列の行列として逆行列をもち，K^{klmn} は $k\leftrightarrow l$, $m\leftrightarrow n$ につきともに対称で，(k, l) を行番号，(m, n) を列番号と見直したとき，6行6列の行列として逆行列をもつ.

B場 b_{ρ} を導入しなかった場合には，$\pi^{0\lambda}$ は $g_{\mu\nu}$ と可換になり正準交換関係と矛盾してしまったが，B場形式では $\pi^{0\lambda}$ と $g_{\mu\nu}$ との正準交換関係は，$g_{\mu\nu}$ と b_{ρ} の間の同時刻交換関係

$$[g_{\mu\nu}(x), b_{\rho}(y)]=-i\kappa(\tilde{g}^{00})^{-1}(\delta_{\mu}{}^{0}g_{\rho\nu}+\delta_{\nu}{}^{0}g_{\mu\rho})\delta^{3}(x-y) \tag{8.8}$$

を与える．これと式 (2.10) から

$$[g^{\mu\nu}(x), b_{\rho}(y)]=i\kappa(\tilde{g}^{00})^{-1}(\delta_{\rho}{}^{\mu}g^{0\nu}+\delta_{\rho}{}^{\nu}g^{\mu 0})\delta^{3}(x-y) \tag{8.9}$$

を得る．同様に $[h, b_{\rho}]$ も式 (8.8) と (2.11) から計算できる.

式 (8.8) を使うと，式 (8.7) から $g_{\mu\nu}$ と $\dot{g}_{mn}$ の同時刻交換関係が得られる．$\dot{g}_{0\lambda}$ は式 (7.22) により $\dot{g}_{mn}$ を用いて書き表されるので，$g_{\mu\nu}$ と $\dot{g}_{0\lambda}$ の同時刻交換関係も計算できる．その結果をまとめると[29]

$$\begin{aligned}[g_{\mu\nu}(x), \dot{g}_{\rho\lambda}(y)]=&-2i\kappa(\tilde{g}^{00})^{-1}[g_{\mu\nu}g_{\rho\lambda}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}\\ &+(g^{00})^{-1}(\delta_{\mu}{}^{0}\delta_{\rho}{}^{0}g_{\nu\lambda}+\delta_{\mu}{}^{0}\delta_{\lambda}{}^{0}g_{\nu\rho}+\delta_{\nu}{}^{0}\delta_{\rho}{}^{0}g_{\mu\lambda}+\delta_{\nu}{}^{0}\delta_{\lambda}{}^{0}g_{\mu\rho})]\delta^{3}(x-y)\end{aligned} \tag{8.10}$$

となる．$g_{\mu\nu}$ と $\dot{g}_{\rho\lambda}$ の同時刻交換関係がこのように近似なしに閉じた形で求まったということは，非常に注目すべきことである.

$\dot{c}^{\sigma}$ は $\bar{c}_{\rho}$ の正準共役量で，$\dot{\bar{c}}_{\tau}$ は c^{λ} の正準共役量ですぐ表せるので，これらを含む同時刻超交換関係は容易に求まる．厄介なのは $\dot{b}_{\rho}$ を含む同時刻交換関係であるが，これはライプニッツの公式

$$[\varphi, \dot{b}_\rho]=\partial_0[\varphi, b_\rho]-[\dot{\varphi}, b_\rho] \tag{8.11}$$

を利用すれば計算できる．ただし φ が b_λ の場合だけはこの方法は役立たない．

$[b_\lambda, \dot{b}_\rho]$ を計算するためには，正直に量子アインシュタイン方程式 (7.21) を $\dot{b}_\rho$ について解かなければならない．このさい，$R_\mu{}^0-\frac{1}{2}\delta_\mu{}^0 R$ が計量テンソルの時間に関する2階微分を全く含まないことに注意する．そこで，$E_\mu{}^0-\frac{1}{2}\delta_\mu{}^0 E$ の表式から $\dot{b}_\rho$ を解き，次に式 (7.21) を利用すれば，$\dot{b}_\rho$ が交換関係が既知な量だけで書き表されることになる．このようにして

$$[b_\lambda(x), \dot{b}_\rho(y)]=i\kappa(\tilde{g}^{00})^{-1}(\partial_\lambda b_\rho+\partial_\rho b_\lambda)\delta^3(x-y) \tag{8.12}$$

という同時刻交換関係が導かれる*．この計算は機械的にやろうとすると非常に大変だが，11章で述べる四脚場形式を利用すれば著しく簡明に行える[30]．

8·3　テンソル的交換関係

式 (8.12) の証明の副産物として

$$[R_{\mu\nu}(x), b_\rho(y)]=-i\kappa(\tilde{g}^{00})^{-1}(\delta_\mu{}^0 R_{\rho\nu}+\delta_\nu{}^0 R_{\mu\rho})\delta^3(x-y) \tag{8.13}$$

という同時刻交換関係が得られる．式 (8.13) と式 (8.8) の類似は著しい．さらに式 (8.9) を用いて $[R_\mu{}^\nu, b_\rho]$ や $[R^{\mu\nu}, b_\rho]$ が計算できるが，後者は式 (8.9) と類似した形になる．これは，テンソル場と b_ρ との同時刻交換関係には一般的な規則性があることを推定させる．

一般に，古典論において，$r+s$ 階のテンソルであった局所量 $\Phi^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s}$ と b_ρ との同時刻交換関係は

$$[\Phi^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s}(x), b_\rho(y)]=i\kappa(\tilde{g}^{00})^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{r}\delta_\rho{}^{\mu_i}\Phi^{\mu_1\cdots 0\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s} - \sum_{j=1}^{s}\delta_{\nu_j}{}^0\Phi^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\rho\cdots\nu_s}\Big]\delta^3(x-y) \tag{8.14}$$

のように書けるものと考えられる[30]．この式の一般的証明はないが，その正当性はスカラー場や電磁場を $\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ に導入した場合のいろいろな場やその共変微

---

* 式 (8.12) の式自身は，BRS 変換に基づく考察から容易に推定できるものである（次章参照）．

分について具体的に確かめられている．定数テンソル $\delta_\nu{}^\mu$ に対して式（8.14）の右辺がたしかにゼロになることも，コンシステンシィのチェックになる．

式（8.14）のことを，テンソル的交換関係（tensor-like commutation relation）と呼ぶ．その理由は，これが2章で述べたテンソルの三つの基本的性質［i）添字の上げ下げ，ii）直積，iii）縮約］をもっているからである．それゆえ，基本的な量がテンソル的交換関係を満たしていれば，それから合成されるいろいろのテンソルはすべてテンソル的交換関係を満たすことが自動的に保証される．一般相対論のもつ一般共変性は，量子化のさいゲージ固定項の導入によってこわされたが，純粋に量子論的な概念である同時刻交換関係においてそれが復活しているのは，まことに興味深いことである．

（付記）その後，テンソル的交換関係は，テンソルに限らない一般の局所量に対する幾何学的交換関係に拡張され，その構造が解明された．

9章　BRS変換と一般線形変換の生成子

9・1　BRS 変換の生成子

作用積分 $\int d^4x\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{QG}}$ は BRS 不変であるので，BRS 変換の生成子が存在するはずである．BRS 変換に対するネーター・カレントは

$$\tilde{J}_{\mathrm{b}}{}^{\mu}\equiv\boldsymbol{\delta}_*(\varphi_\alpha)\frac{\partial\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{QG}}}{\partial(\partial_\mu\varphi_\alpha)}+\boldsymbol{\delta}(x^\mu)\mathscr{L}_{\mathrm{QG}}+\boldsymbol{\delta}_*(\mathscr{D}^\mu) \tag{9.1}$$

で与えられる．式 (3.22) の一般式と異なるのは，$\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{QG}}$ が $\mathscr{L}_{\mathrm{QG}}$ と異なるための補正による．

式 (9.1) の計算は非常に複雑だが，量子アインシュタイン方程式 (7.21) を使うと見通しのよい形になる．その結果は[29,31]

$$\tilde{J}_{\mathrm{b}}{}^{\mu}=J_{\mathrm{b}}{}^{\mu}-\partial_\nu I^{\mu\nu} \tag{9.2}$$

と書ける．ここに

$$J_{\mathrm{b}}{}^{\mu}\equiv\tilde{g}^{\mu\nu}(b_\rho\partial_\nu c^\rho-\partial_\nu b_\rho\cdot c^\rho) \tag{9.3}$$

で，$I^{\mu\nu}$ は一般に物質場にも依存するある反対称テンソルである．

式 (9.2) により，BRS 変換の生成子は

$$Q_{\mathrm{b}}\equiv\int d^3x J_{\mathrm{b}}{}^0(x) \tag{9.4}$$

で与えられる．Q_{b} が実際に BRS 変換の生成子であること，すなわちすべての場 $\varphi(x)$ に対し

$$[Q_{\mathrm{b}},\varphi(x)]_*=-i\boldsymbol{\delta}_*(\varphi(x)) \tag{9.5}$$

となることは，同時刻超交換関係を用いて直接確かめられる*．

---

* b_ρ について式 (9.5) を確かめるときに式 (8.12) が必要になる．このことから逆に，式 (8.12) の右辺の形が証明に先だって推定できたのである．

この Q_{b} を用いて補助条件

$$Q_{\mathrm{b}}|\,f\rangle=0 \tag{9.6}$$

を設定すると，6章で説明した九後－小嶋のカルテット機構により，物理的S行列のユニタリ性が証明される．

9·2　並進と一般線形変換の生成子

正準エネルギー・運動量テンソル密度は

$$\mathcal{T}_\mu{}^\nu\equiv\partial_\mu\varphi_\alpha\cdot\frac{\partial\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{QG}}}{\partial(\partial_\nu\varphi_\alpha)}-\delta_\mu{}^\nu\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{QG}} \tag{9.7}$$

によって定義される．これは

$$\mathcal{T}_\mu{}^\nu=h(T_\mu{}^\nu+t_\mu{}^\nu+\tau_\mu{}^\nu) \tag{9.8}$$

と書くことができる．つまり，古典論の式（2.34）の $\mathcal{T}^{\mathrm{clas}}{}_\mu{}^\nu$ に $h\tau_\mu{}^\nu$ がつけ加わったものである．$\tau_\mu{}^\nu$ は，b_ρ, c^σ, $\bar{c}_\tau$ を含む項のみから成る．$h\tau_\mu{}^\nu$ があるおかげで，$\mathcal{T}_\mu{}^\nu$ は4次元発散だけに帰着しない．実際，量子アインシュタイン方程式（7.21）を使って式（9.7）を計算すると[32,31]

$$\mathcal{T}_\mu{}^\nu=\kappa^{-1}\tilde{g}^{\nu\lambda}\partial_\lambda b_\mu-\partial_\lambda\mathcal{F}_\mu{}^{\nu\lambda} \tag{9.9}$$

となる．ここに $\mathcal{F}_\mu{}^{\nu\lambda}$ は $\mathcal{F}^{\mathrm{clas}}{}_\mu{}^{\nu\lambda}$ とは b_ρ, c^σ, $\bar{c}_\tau$ を含む項だけちがうが，やはり $\nu\leftrightarrow\lambda$ について反対称な量である．

式（9.9）から直ちに，並進の生成子は

$$P_\mu\equiv\kappa^{-1}\int d^3x\tilde{g}^{0\lambda}\partial_\lambda b_\mu \tag{9.10}$$

で与えられることがわかる．この式は $\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ のいかんにかかわらず成立するので，将来素粒子物理学がどのように進展しても，並進の生成子が式（9.10）で与えられるという事実は変更を要しないわけである．もちろん，5章で述べた電荷演算子 Q に関する注意と同じく，式（9.10）の右辺は固有値を与えない．全エネルギー・運動量の演算子は，$-\partial_k\mathcal{F}_\mu{}^{0k}$ からくる表面積分をも考慮しなければならないのである．

一般線形変換の生成子も同様の考察に基づいて構成される．表面積分の項を捨てた形で，$GL(4)$ の生成子は[32,33]

$$\hat{M}^{\mu}{}_{\nu} \equiv \kappa^{-1} \int d^3x \tilde{g}^{0\lambda} [x^{\mu} \partial_{\lambda} b_{\nu} - \delta_{\lambda}{}^{\mu} b_{\nu} - i\kappa (\bar{c}_{\nu} \partial_{\lambda} c^{\mu} - \partial_{\lambda} \bar{c}_{\nu} \cdot c^{\mu})] \quad (9.11)$$

と書ける．これと $g_{\sigma\tau}$ との交換関係は

$$[\hat{M}^{\mu}{}_{\nu}, g_{\sigma\tau}] = -i(x^{\mu} \partial_{\nu} g_{\sigma\tau} + \delta_{\sigma}{}^{\mu} g_{\nu\tau} + \delta_{\tau}{}^{\mu} g_{\sigma\nu}) \quad (9.12)$$

である．右辺の第1項が軌道部分，第2項と第3項が $g_{\sigma\tau}$ のスピン部分を表す．

9·3 一般線形変換不変性の自発的破れ

$\hat{M}^{\mu}{}_{\nu}$ は生成子としては意味があるが，どんな表面積分項をつけ加えたとしても決してよく定義された演算子にはなりえない．なぜなら，もし $\hat{M}^{\mu}{}_{\nu}$ がよく定義された演算子であったとすれば，それを指数関数の肩にのせることにより有限の大きさの一般線形変換を起こさせることができるはずである．これを同時刻超交換関係に適用すると，あらゆる場が同時空点以外のすべてにおいて可換または反可換になってしまい，明らかに不合理だからである．ただし，ローレンツ変換に対する部分だけはよく定義された演算子であることができる．ローレンツ変換の場合は，光円錐という不変面が存在するので，上のような不都合を生じないからである．

ローレンツ変換は次のようにして特徴づけられる．真空 $|0\rangle$ では重力がなく時空は平坦だと考えられるから

$$\langle 0 | g_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle = \eta_{\mu\nu} \quad (9.13)$$

とするのが自然である．そこで，式 (9.12) の真空期待値をとると

$$\langle 0 | [\hat{M}^{\mu}{}_{\nu}, g_{\sigma\tau}] | 0 \rangle = -i(\delta_{\sigma}{}^{\mu} \eta_{\nu\tau} + \delta_{\tau}{}^{\mu} \eta_{\sigma\nu}) \quad (9.14)$$

となるから，3章において説明したように $\hat{M}^{\mu}{}_{\nu}$ は自発的に破れていることがわかる．しかし

$$\overline{M}_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\mu} \hat{M}^{\mu}{}_{\beta} - \eta_{\beta\mu} \hat{M}^{\mu}{}_{\alpha} \quad (9.15)$$

を考えると，式 (9.14) から

$$\langle 0 | [\overline{M}_{\alpha\beta}, g_{\sigma\tau}] | 0 \rangle = 0 \quad (9.16)$$

となり，反対称部分の6成分は自発的に破れていない．この $\overline{M}_{\alpha\beta}$ がまさしくローレンツ生成子にほかならない．また式 (9.14) から，自発的に破れている

$\hat{M}^{\mu}{}_{\nu}$ の対称部分の10成分に対応するゴールドストーン粒子の場が，まさしく $g_{\sigma\tau}$ であることがわかる[34)]．すなわち，5章で述べた光子の質量がゼロという証明と全く同様に，重力子の質量が正確にゼロであることが証明されたわけである．同じことがヤン－ミルズ場については成立しないのは，注目に値する．

10章 16次元ポアンカレ的超代数

10・1 144個の生成子

BRS 生成子 Q_b や $GL(4)$ の生成子 $\hat{M}^\mu{}_\nu$ などの式を眺めてみると，そこにある種の共通のパターンが見いだせる．とくに式 (9.11) の右辺第2項で $\delta_\lambda{}^\mu$ を $\partial_\lambda x^\mu$ と書き直してみると，このことがはっきりする．そこで，ネーター・カレントに頼らずに直接保存カレントを統一的に導出することを考えよう[35]．

まず，場の方程式 (7.22)―(7.24) と (7.26) は

$$\partial_\mu(\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu X)=0 \tag{10.1}$$

という形にまとめられることに注意する．ここに

$$X=\{x^\lambda/\kappa, b_\rho, c^\sigma, \bar{c}_\tau\} \tag{10.2}$$

は，一つの16次元の超ベクトルと考えることができる．x^λ/κ だけはただの c 数で，他は量子化された場であるから，全く同列には扱えるはずはないのだが，以下に見られるように，X を16次元超座標のように考えるときわめてうまくゆくのである．

式 (10.1) は

$$\mathcal{P}^\mu(X)\equiv\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu X \tag{10.3}$$

という16次元の保存超カレントが存在することを意味する．さらに，Y をもう一つの16次元超座標とすると

$$\mathcal{M}^\mu(X, Y)\equiv\sqrt{\epsilon(X, Y)}\,\tilde{g}^{\mu\nu}(X\partial_\nu Y-\partial_\nu X\cdot Y) \tag{10.4}$$

も保存超カレントであることがわかる．ただし，$\sqrt{\epsilon(X, Y)}$ はエルミートにするためにつけた係数で，$\epsilon(X, Y)$ は3章で導入した符号因子，根号は $\sqrt{+1}$

$=+1$, $\sqrt{-1}=+i$ と約束する.

式 (10.3) と (10.4) から直ちに, 保存量[35,36]

$$P(X)\equiv\int d^3x\mathscr{P}^0(X) \tag{10.5}$$

$$M(X,Y)\equiv\int d^3x\mathscr{M}^0(X,Y) \tag{10.6}$$

が定義される. $P(X)$ と $M(X,Y)$ はそれぞれ16次元超空間における並進生成子とローレンツ生成子のようなものである. XやYは添字のμやνに相当するものであって, もちろん変数ではない.

式 (10.4) からすぐわかるように

$$M(Y,X)=-\epsilon(X,Y)M(X,Y) \tag{10.7}$$

である. つまりXとYがともに FP お化けのときは対称, それ以外については反対称である. このことから, $M(X,Y)$ は128個の独立な生成子を表していることがわかる. これに $P(X)$ の16個を加えると, じつに144個もの生成子が見つかったことになる. 先に考察した $Q_{\mathrm{b}}, P_\mu, \hat{M}^\mu{}_\nu$ などは

$$Q_{\mathrm{b}}=M(b_\mu,c^\mu) \tag{10.8}$$

$$P_\mu=\kappa^{-1}P(b_\mu) \tag{10.9}$$

$$\hat{M}^\mu{}_\nu=-M(b_\nu,x^\mu/\kappa)-M(\bar{c}_\nu,c^\mu) \tag{10.10}$$

のように表示される.

10・2　16次元の超空間

$P(X)$ および $M(X,Y)$ の満たす超交換関係は, 16次元の超計量 $\eta(X,Y)$ を導入しておくと統一的に書き表せる. $\eta(X,Y)$ は

$$\left.\begin{array}{l}\eta(x^\lambda/\kappa,b_\rho)=\eta(b_\rho,x^\lambda/\kappa)=\eta(c^\lambda,\bar{c}_\rho)=-\eta(\bar{c}_\rho,c^\lambda)=\delta_\rho{}^\lambda\\ \text{その他は}\ \eta(X,Y)=0\end{array}\right\} \tag{10.11}$$

によって定義される. これを16行16列の行列とみれば, 対角行列ではないがその行列式は1である.

16次元の超計量 $\eta(X,Y)$ を用いると, 16次元の超座標 U との超交換関係は[36]

$$[P(X), U]_* = \sqrt{-\epsilon(X)}\,\eta(X, U) - i\kappa\eta(X, x^\mu/\kappa)\partial_\mu U \quad (10.12)$$

$$[M(X, Y), U]_* = \sqrt{-\epsilon(XY, U)}[\eta(Y, U)X - \epsilon(X, Y)\eta(X, U)Y] - i\kappa[\eta(Y, x^\mu/\kappa)X - \eta(X, x^\mu/\kappa)Y]\partial_\mu U \quad (10.13)$$

のようにまとめられることが，同時刻超交換関係から証明される．Uがとくにc数の時空座標 x^λ/κ のときには左辺は当然ゼロだが，実際そのとき右辺もたしかにゼロになっていることが確かめられる．

16次元の超座標ではない通常のテンソル量 $\Phi^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s}(x)$ との交換関係は

$$[P(X), \Phi^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s}] = -i\kappa\eta(X, x^\lambda/\kappa)\partial_\lambda\Phi^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s} \quad (10.14)$$

$$[M(X, Y), \Phi^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s}] = i\kappa\Big[\sum_{i=1}^{r}\eta(Y, x^{\mu_i}/\kappa)\partial_\lambda X\cdot\Phi^{\mu_1\cdots\lambda\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s} - \sum_{j=1}^{s}\eta(Y, x^\lambda/\kappa)\partial_{\nu_j}X\cdot\Phi^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\lambda\cdots\nu_s} - \eta(Y, x^\lambda/\kappa)X\partial_\lambda\Phi^{\mu_1\cdots\mu_r}{}_{\nu_1\cdots\nu_s}\Big] - (X\leftrightarrow Y) \quad (10.15)$$

となる．右辺に軌道部分の寄与があるのは，$\eta(\cdot, x^\lambda/\kappa)$ がゼロにならない場合であるから，式 (10.11) により，$P(X)$ は $X=b_\rho$ のときに，$M(X, Y)$ は XとYのうち少なくとも一方が b_ρ であるときに時空対称性の生成子になっていることがわかる．それ以外のときは，内部対称性の生成子である．なお，式 (10.14) はハイゼンベルク方程式の16次元形といえる．

生成子 $P(X)$ と $M(X, Y)$ に関する超交換関係は次のようになる[36]．

$$[P(X), P(Y)]_* = 0 \quad (10.16)$$

$$[M(X, Y), P(U)]_* = \sqrt{-\epsilon(XY, U)}[\eta(Y, U)P(X) - \epsilon(X, Y)\eta(X, U)P(Y)] \quad (10.17)$$

$$[M(X, Y), M(U, V)]_* = \sqrt{-\epsilon(XY, UV)}[\eta(Y, U)M(X, V) - \epsilon(X, Y)\eta(X, U)M(Y, V) + \epsilon(X, Y)\epsilon(U, V)\eta(X, V)M(Y, U) - \epsilon(U, V)\eta(Y, V)M(X, U)] \quad (10.18)$$

式 (10.16)—(10.18) にはもはや x^λ/κ のような特殊方向がなく，完全に16次元的である．しかも，FP お化けの統計性に基因する符号因子のことを度外視すれば，これらはポアンカレ代数の交換関係 (3.15)—(3.17) と全く同じ構造をもっている．それゆえ，$P(X)$ と $M(X, Y)$ とで作られる超代数を16次

元のポアンカレ的超代数 (Poincaré-like superalgebra) と呼ぶ.

こうして，いったん重力場の共変的正準量子論が 16 次元のポアンカレ的超対称性をもっていることがわかってしまえば，最初からラグランジアン密度においてそれを見るのは容易である.

16 次元の超計量の反変成分 $\tilde{\eta}(X, Y)$ を，$\eta_{\mu\lambda}\eta^{\lambda\nu}=\delta_\mu{}^\nu$ にならって

$$\sum_Z \eta(X, Z)\tilde{\eta}(Z, Y)=\delta(X, Y) \tag{10.19}$$

によって定義する. ここに $\delta(X, Y)$ は 16 次元のクロネッカー・デルタである. 具体的に書くと

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\eta}(x^\lambda/\kappa, b_\rho)=\tilde{\eta}(b_\rho, x^\lambda/\kappa)=-\tilde{\eta}(c^\lambda, \bar{c}_\rho)=\tilde{\eta}(\bar{c}_\rho, c^\lambda)=\delta_\lambda{}^\rho\\&\text{その他は }\ \tilde{\eta}(X, Y)=0\end{aligned}\right\} \tag{10.20}$$

となる. これを使えば，式 (7.25) は

$$E_{\mu\nu}=\kappa\sum_{X,Y}\sqrt{\epsilon(X)}\tilde{\eta}(X, Y)\partial_\mu X\cdot\partial_\nu Y \tag{10.21}$$

という 16 次元形式に書き直せる. さらに

$$\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}+\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}=-(2\kappa)^{-1}hE \tag{10.22}$$

である.

16 次元の超対称性の無限小変換は，逆に式 (10.12)—(10.15) の右辺の i 倍でもって定義すればよい. そうすると，理論の不変性を直接ラグランジアン密度において確かめられる. 実際，R, E, $h^{-1}\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ のおのおのが，式 (10.14) と (10.15) のスカラーの場合の変換性を示すから，このことから直ちに作用積分の不変性がわかる. それゆえ，これからネーター超カレントを作ることもできる. そしてそれから再び $\mathscr{P}^\mu(X)$ と $\mathscr{M}^\mu(X, Y)$ を導ける[31].

$\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ の中には含められない hR^2 や $hR^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ に比例する項をつけ加えたアインシュタイン理論の修正重力理論を考えたときも，$\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}+\mathscr{L}_{\mathrm{FP}}$ が同じである限り明らかに 16 次元のポアンカレ的超対称性をもつ. このことは実際に量子化を遂行して確認されている[37].

上述のごとく，重力場の共変的正準量子論は，時空対称性と内部対称性とを混然一体とするきわめて大きな対称性をもっているわけである. 特殊相対論の画期的な成功以来，時空の次元数を拡大する試みは数多くなされてきたが，い

わゆるダメ定理[38] (no-go theorem) によって，時空につけ加えた自由度はどうしても人為的に差別しなければならない．唯一の例外は，時空にグラスマン数のマヨラナ・スピノルをつけ加える 8 次元の超対称性[39] (supersymmetry), およびそれを局所化して得られる超重力[40] (supergravity)* であるが，非常に自然な理論とはいいがたいように思われる．

重力場の共変的正準量子論がこのダメ定理に抵触しない理由は，定理の前提になっている計量の正定値性が破れているからである．16 次元のポアンカレ的超対称性は，ほとんどがお化けに関する対称性であって，物理的な内部対称性を含んでいない．しかし，この超対称性を拡大して，物理的な内部対称性をも含ませることは可能である．実際，電磁場と重力場の結合系の共変的正準量子論では，このポアンカレ的超対称性が電磁場の $U(1)$ 生成子をも包含するより大きな超対称性にまで拡大される[41]．したがって，このような方向がさらにおし進められれば，統一理論が構成できるかもしれない．

10·3　ポアンカレ的超対称性の自発的破れ

16 次元のポアンカレ的超対称性は自発的に破れている．その原因は，$GL(4)$ の自発的破れを導いた式 (9.13) のほかに，自明の式

$$\langle 0|1|0\rangle = 1 \tag{10.23}$$

が成立するからである．すなわち，16 次元の超座標 (10.2) のうち x^λ/κ だけがゼロでない真空期待値をもつわけで，式 (9.13) をさておいても 16 次元の超対称性は自発的に破れざるをえない．この自発的破れから，$b_\rho, c^\sigma, \bar{c}_\tau$ の質量が正確にゼロでなければならないことがいえる．

自発的に破れないで生き残る対称性は，ポアンカレ生成子 $P_\mu, \overline{M}_{\alpha\beta}$ の 10 個と，$M(X, Y)$ のうち X も Y も x^λ/κ でないような 74 個の生成子である．$M(X, Y)$ が自発的に破れていなければ，任意の場の演算子の時間順序積 $\mathcal{O}$ に対し，つねに

* 超重力は，真の意味で超対称性の局所化にはなっていない．局所化された対称性はすべて内部対称性であって，時空対称性については超重力の基本原理からは何もいえない．ラグランジアン密度を書くときに，だまって一般相対論の形式を流用しているのにすぎないのである．

$$\langle 0|[M(X, Y), \mathcal{O}]_{*}|0\rangle=0 \tag{10.24}$$

が成立する．ローレンツ共変性もウォード－高橋の関係式もこの形で統一的に論じられるわけである．式（10.24）が実際に摂動論で成立していることは，ループ1個のオーダーまで確かめられている[42]．

なお，自発的に破れた場合に，式（10.24）をどのように修正すべきかも調べられている[43]．

11章　四脚場形式

11・1　四脚場形式の古典論

今までとくに断らなかったが，$\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ に含まれる物質場は，広義のテンソル場すなわち整数スピンの場でなくてはならない．ところが，自然界には電子などのレプトン，核子などのバリオン，あるいはその基本構成子としてのクォークが存在することは間違いない．これらはスピン 1/2 であって，ディラック方程式に従う．それゆえ，$\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ の中にディラック場を含めることが絶対に必要である．

ところが不幸にして，ローレンツ群のスピノル表現を，より大きな群の線形表現に拡大することは数学的に不可能である．したがって，一般座標変換のもとに共変なスピノルというものは存在しない．それで一般共変なディラック理論では，ディラック場をスカラー場に格下げし，その代わりガンマ行列をベクトル場に昇格させる．ガンマ行列の反交換子は計量テンソルの 2 倍に等しいはずだから，$g_{\mu\nu}(x)$ が場であればガンマ行列も場であらざるをえないわけである．

ディラック場が座標変換のもとにスピノルの変換性を示さないという古典論の困難は，あとで見られるように，重力場の共変的正準量子論においてはじめて合理的な解決が与えられるのである．

一般共変なディラック理論は，四脚場形式（vierbein formalism）により最も自然に定式化される．それゆえ，まず四脚場形式の古典論を復習しておく．

四脚場（vierbein, tetrad）を $h_{\mu a}(x)$ $(a=0, 1, 2, 3)$ で表す．これは局所慣性系の座標軸を表す四つのベクトル場であるので，この名がある．計量テンソ

ルとは

$$g_{\mu\nu}=\eta^{ab}h_{\mu a}h_{\nu b} \tag{11.1}$$

という関係で結ばれている．局所慣性系とは，リーマン空間の各点での接空間である局所ミンコフスキー空間であって，その計量は η_{ab} で与えられる．$h_{\mu a}$ は 16 個の独立成分をもつから，$g_{\mu\nu}$ を与えても 6 自由度分だけは決まらない．この 6 個の自由度は，式（11.1）からわかるように，局所ミンコフスキー空間での座標変換，すなわち局所ローレンツ変換の自由度にほかならない．局所ミンコフスキー空間はあくまでも内部空間であるので，このことを強調するために局所内部ローレンツ変換と呼ぶことにする．一般座標変換は並進を局所化したものであるが，これはあくまでも時空対称性であるから，これと局所内部ローレンツ変換とを同列に置いて局所的なポアンカレ群のようなものを考えるのは論理的におかしい．両者は独立なものと考えるべきであろう．

式（11.1）の両辺の行列式をとれば

$$\det h_{\mu}{}^{a}=h \tag{11.2}$$

を得る．ただし，h は式（2.4）で定義したもので，$h\neq 0$ である．それゆえ，行列 $h_{\mu}{}^{a}$ は逆行列をもつ．式（11.1）の両辺にそれをかければ，その逆行列は $h^{\mu}{}_{a}\equiv g^{\mu\nu}h_{\nu a}$ に等しいことが知られる．

四脚場形式では $h_{\mu}{}^{a}$ が基本場であり，$g_{\mu\nu}$ はそれを用いて表される量となる．式（2.14）を拡張して

$$\nabla_{\mu}h_{\nu}{}^{a}\equiv\partial_{\mu}h_{\nu}{}^{a}-\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}h_{\lambda}{}^{a}+\hat{\Gamma}_{\mu}{}^{ab}h_{\nu b}=0 \tag{11.3}$$

とおく．ここに $\hat{\Gamma}_{\mu}{}^{ab}$ は内部空間に関するアフィン接続であって，スピン接続 (spin connection) と呼ばれている．式 (11.3) をスピン接続について解くと*

$$\hat{\Gamma}_{\mu}{}^{ab}\equiv(\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}h_{\lambda}{}^{a}-\partial_{\mu}h_{\nu}{}^{a})h^{\nu b} \tag{11.4}$$

と定義すればよいことがわかる．式（11.4）を具体的に四脚場で書き表してみると，$\hat{\Gamma}_{\mu}{}^{ab}$ は $a\leftrightarrow b$ について反対称であることが示される．

式（11.3）を用いると，式（2.19）から容易に

$$R^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}=h^{\lambda}{}_{a}h_{\rho b}\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab} \tag{11.5}$$

---

* 都合上，重力場の量子論の原論文に用いられている $\Gamma_{\mu}{}^{ab}$ を $-\hat{\Gamma}_{\mu}{}^{ab}$ に書き改めた．

を導くことができる．ここに

$$\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}\equiv\partial_\mu\hat{\Gamma}_\nu{}^{ab}-\partial_\nu\hat{\Gamma}_\mu{}^{ab}+\hat{\Gamma}_\mu{}^{ac}\hat{\Gamma}_{\nu c}{}^b-\hat{\Gamma}_\nu{}^{ac}\hat{\Gamma}_{\mu c}{}^b \tag{11.6}$$

とする．$\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}$ は $\mu\leftrightarrow\nu$ および $a\leftrightarrow b$ についてともに反対称である．式（11.6）と式（2.20）の類似は著しい．しかし，$\hat{\Gamma}_\mu{}^{ab}$ は $\Gamma_{\mu\nu}{}^\lambda$ とは異なりあくまで共変ベクトルなので，上の関係式は非常に便利である．ただし，もちろん $\hat{\Gamma}_\mu{}^{ab}$ は局所内部ローレンツ変換に対しては共変でないことに注意しなければならない．

11·2　一般共変なディラック理論

次に，一般共変なディラック理論[44)]を四脚場形式で書く．ミンコフスキー空間でのガンマ行列を $\mathring{\gamma}_a$ と書くと，もちろん

$$\{\mathring{\gamma}_a,\mathring{\gamma}_b\}=2\eta_{ab} \tag{11.7}$$

である．また

$$\mathring{\sigma}_{ab}\equiv[\mathring{\gamma}_a,\mathring{\gamma}_b]/4 \tag{11.8}$$

とおく．

一般共変なディラック理論のガンマ行列は

$$\gamma^\mu(x)\equiv h^{\mu a}(x)\mathring{\gamma}_a \tag{11.9}$$

で定義される．式（11.7）—（11.9）から

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu} \tag{11.10}$$

が従う．

ディラック場 $\psi(x)$ の共変微分は

$$\nabla_\mu\psi\equiv(\partial_\mu+\omega_\mu)\psi \tag{11.11}$$

で定義される．ただし

$$\omega_\mu\equiv\frac{1}{2}\mathring{\sigma}_{ab}\hat{\Gamma}_\mu{}^{ab} \tag{11.12}$$

である．ディラック方程式は，質量をmとすると

$$(\gamma^\mu\nabla_\mu+im)\psi=0 \tag{11.13}$$

となる．この式は一般共変であるとともに，局所内部ローレンツ変換に対しても共変である．ψ の共役量 $\bar{\psi}$ は，$\psi^\dagger\mathring{\gamma}_0$ で定義される．γ_0 でなく，平坦な場合

の $\mathring{\gamma}_0$ を用いていることに注意．$\bar{\psi}$ に対する共変微分は，式 (11.1) から

$$\bar{\psi}\overleftarrow{\nabla}_\mu \equiv \bar{\psi}(\overleftarrow{\partial}_\mu - \omega_\mu) \tag{11.14}$$

となる．ただし，$\overleftarrow{\partial}_\mu$ は左に作用する微分演算を表す．

ディラック理論のエルミートなラグランジアン密度は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{D}} \equiv \frac{1}{2} ih\bar{\psi}\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \frac{1}{2} i\bar{\psi}\overleftarrow{\nabla}_\mu \gamma^\mu \psi h - mh\bar{\psi}\psi \tag{11.15}$$

で与えられる．$\mathscr{L}_{\mathrm{D}}$ は一般座標変換のもとにスカラー密度であると同時に，局所内部ローレンツ変換に対して不変である．

四脚場形式では，物質場のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は，式 (2.32) を拡張して

$$T^{\mu\nu} \equiv -h^{-1}h^\nu{}_a \left(\frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{M}}}{\partial h_{\mu a}} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{M}}}{\partial(\partial_\lambda h_{\mu a})} \right) \tag{11.16}$$

で定義される．これを $\mathscr{L}_{\mathrm{D}}$ の場合に適用すると，$T_{\mathrm{D}}{}^{\mu\nu}$ として見かけ上 $\mu \leftrightarrow \nu$ につき対称でないような式が得られるが，ディラック方程式を使って変形すると対称であることがわかる．一般に $\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ が局所内部ローレンツ変換に対し不変であれば，式 (11.16) で定義される $T^{\mu\nu}$ は対称であることが，不変変分論[45] (theory of invariant variation) を用いて証明される．

11·3　局所内部ローレンツ変換に対応する BRS 変換

以上の古典論を準備として，四脚場 $h_{\mu a}$ を基本場とする重力場の共変的正準量子論を構成する．

$h_{\mu a}$ が含む局所内部ローレンツ変換の 6 自由度は，全く運動学的なものであって，それを力学変数として意味づけるような項は，一般相対論のラグランジアン密度の中に存在しない．それゆえちょっと考えると，この 6 自由度を消去してしまわなければ正準量子化はできそうにないと思われる．ところが，理論の複雑な非線形性のゆえに消去は不可能である．また $h_{\mu a}=h_{a\mu}$ のごとき勝手な条件を設定すると，理論の美しさは完全に破壊されてしまう．

それではこの 6 自由度はどう処理するのかというと，結局ゲージ場の縦波の処理と同じ方法を使えばよいのである．つまり，新しい B 場 s_{ab} と，それに伴

う一対の FP お化け t_{ab} と $\bar{t}_{ab}$ を導入し，6 章で述べた九後－小嶋のカルテット機構が働くようにするわけである．ここに，新しい場 $s_{ab}, t_{ab}, \bar{t}_{ab}$ はいずれも $a \leftrightarrow b$ につき反対称なスカラー場とする．もちろん，t_{ab} と $\bar{t}_{ab}$ はフェルミ統計に従う．

局所内部ローレンツ変換に対応する新しい BRS 変換を $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{L}}$ で表す．無限小ローレンツ変換の式から直ちに

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{L}}(h_{\mu a}) = -t_a{}^b h_{\mu b} \tag{11.17}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{L}}(\psi) = -\frac{1}{2} t^{ab} \mathring{\sigma}_{ab} \psi \tag{11.18}$$

が得られる．b_ρ, c^σ, $\bar{c}_\tau$ や整数スピンの物質場の $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{L}}$ はもちろんすべてゼロである．$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{L}}(g_{\mu\nu}) = 0$ は式 (11.17) と (11.1) から従う．

ローレンツ生成子間の交換関係 (3.17) を，式 (6.1) と同じ形の

$$\left[\frac{1}{2} M_{ab}, \frac{1}{2} M_{cd}\right] = i f_{ab,cd}{}^{ef} \cdot \frac{1}{2} M_{ef} \tag{11.19}$$

に書き改めると，構造定数は

$$\begin{aligned} f_{ab,cd}{}^{ef} \equiv [(&\eta_{bc}\delta_a{}^e\delta_d{}^f - \eta_{ac}\delta_b{}^e\delta_d{}^f + \eta_{ad}\delta_b{}^e\delta_c{}^f \\ &- \eta_{bd}\delta_a{}^e\delta_c{}^f) - (e \leftrightarrow f)]/4 \end{aligned} \tag{11.20}$$

で与えられることがわかる．それゆえ，式 (6.10) を参照すると

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{L}}(t_{ab}) = -t_a{}^c t_{cb} \tag{11.21}$$

が得られる．また，式 (6.11) にならって

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{L}}(\bar{t}_{ab}) = i s_{ab}, \quad \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{L}}(s_{ab}) = 0 \tag{11.22}$$

とする．

このとき $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{L}}$ は，もちろん BRS 変換の基本的性質 (6.13) と (6.14) を満足する．一般座標変換の BRS 変換 $\boldsymbol{\delta}$ とは独立であって，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{L}}$ と $\boldsymbol{\delta}$ は可換と考えても反可換と考えてもよい．また，$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{L}}$ は内部対称性に関するものであるから，当然 ∂_μ とは可換である．

式 (11.4) と (11.17) および式 (11.20) から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{L}}(\hat{\Gamma}_\mu{}^{ab}) &= -t^a{}_c \hat{\Gamma}_\mu{}^{cb} + t^b{}_c \hat{\Gamma}_\mu{}^{ca} + \partial_\mu t^{ab} \\ &= \partial_\mu t^{ab} + f_{ef,cd}{}^{ab} \hat{\Gamma}_\mu{}^{ef} t^{cd} \end{aligned} \tag{11.23}$$

を得る．この右辺はまさしく t^{ab} の共変微分であるので，$D_\mu{}^{ab}{}_{cd}t^{cd}$ と書く．これと式 (6.9) を比較してみると，$\hat{\Gamma}_\mu{}^{ab}$ がヤン-ミルズ場の $A_\mu{}^a$ に対応していることがわかる．

11·4 局所内部ローレンツ変換のゲージ固定項

局所内部ローレンツ変換のゲージ固定項 $\mathscr{L}_{\mathrm{LGF}}$ の導入を考える．これは次の諸要請を満足するように選定する．

i) 局所内部ローレンツ変換不変性を破る．ただし，全域的な内部ローレンツ不変性は保つようにする．

ii) 四脚場と s_{ab} のみで書ける．

iii) 一般座標変換のもとでスカラー密度である．

iv) 一つの項に含まれる時間微分 ∂_0 の数は 2 個までとする．

v) 局所内部ローレンツ変換の 6 自由度に対応する四脚場の成分の時間微分を含む．

上記の要請のうち，i) と ii) はB場形式のゲージ固定項として当然の要求である．iii) は不可避的に必要というものではないが，それだけにかえってその重要性を強調しておかなければならない．もしこれが満たされないと，一般座標変換のゲージ固定が式 (7.13) の $\mathscr{L}_{\mathrm{GF}}$ と今度の $\mathscr{L}_{\mathrm{LGF}}$ との両方によってなされることになり，今までに $g_{\mu\nu}$ を基本場として構成してきた重力場の共変的正準量子論の結果を全部ご破算にしてしまうことになる．要請の iv) と v) は，$h_{\mu a}$ を基本場として正準量子化ができるようにするということである．

以上の要請から

$$\mathscr{L}_{\mathrm{LGF}} \equiv -\tilde{g}^{\mu\nu}\hat{\Gamma}_\mu{}^{ab}\partial_\nu s_{ab} \tag{11.24}$$

という形が決められる．もちろんこれに，要請 i)—iv) を満たす量 $hh^{\nu a}\partial_\nu h^{\mu b}\cdot\partial_\mu s_{ab}$ や $hs^{ab}s_{ab}$ の任意の一次結合を付加しても差し支えないわけだが，簡単のため省略する．式 (11.24) は，ヤン-ミルズ場のゲージ固定項 (6.6) のランダウ・ゲージの場合に完全に対応している．実際，式 (6.6) で $\alpha=0$ としたものを一般座標変換に対しスカラー密度になるように拡張してから，$A_\mu{}^a$ を

$\hat{\Gamma}_\mu{}^{ab}$ で，B^a を s^{ab} でおきかえれば，式 (11.24) が得られる．

$\hat{\Gamma}_\mu{}^{ab}$ は $A_\mu{}^a$ と対応するものであるが，前者は基本場ではなく，四脚場の微分を含む量である．したがって，$\mathscr{L}_{\rm LGF}$ の各項は2個の微分を含んでいる（微分演算子の個数が偶数でなければならないことは，s_{ab} も $h_{\mu c}$ もともに偶数個の添字をもつことから明らか）．それゆえ，$\partial_\nu s_{ab}$ の微分演算子を部分積分によって移すことはできず，s_{ab} を正準量と考えなければならないことがわかる．これは，B場をラグランジュ未定係数場 (Lagrange multiplier field) と同一視する一般的風潮に対する反例を与えるものとして興味深い．また，局所内部ローレンツ変換の6自由度は古典論では力学変数をもたなかったが，$\mathscr{L}_{\rm LGF}$ が ∂_0 を2個含むことによりこの困難が完全に解消されることは，注目すべきことである．

式 (11.24) に符合する FP お化けの項 $\mathscr{L}_{\rm LFP}$ は，もちろん

$$\mathscr{L}_{\rm LGF}+\mathscr{L}_{\rm LFP}=\boldsymbol{\delta}_{\rm L}(i\tilde{g}^{\mu\nu}\hat{\Gamma}_\mu{}^{ab}\partial_\nu\bar{t}_{ab}) \tag{11.25}$$

によって決定される．すなわち，式 (11.23) から

$$\mathscr{L}_{\rm LFP}\equiv-i\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\bar{t}_{ab}\cdot D_\nu{}^{ab}{}_{cd}t^{cd} \tag{11.26}$$

となる．当然のことながら，式 (11.26) は，式 (6.7) と完全に対応している．

11·5　四脚場形式の重力場の量子論の概要

ディラック場を重力場の共変的正準量子論にとりいれたいときは，結局，式 (7.20) の $\mathscr{L}_{\rm M}$ の中に $\mathscr{L}_{\rm D}$ と $\mathscr{L}_{\rm LGF}+\mathscr{L}_{\rm LFP}$ とを含ませればよい．こうして四脚場を基本場とする重力場の共変的正準量子論が構成されるが，その詳細はすべて省略し，主要な結果のみを挙げておこう[46,47]．

まず，場の方程式 (7.21)—(7.24) はすべてそのまま成立し，式 (7.26) も導かれる．ただし，量子アインシュタイン方程式 (7.21) の右辺の $T_{\mu\nu}$ は，$\mathscr{L}_{\rm LGF}+\mathscr{L}_{\rm LFP}$ からの寄与をも含む．これは $\mathscr{L}_{\rm D}$ とはちがって局所内部ローレンツ不変性を破っているから，それからの寄与は $\mu\leftrightarrow\nu$ について対称ではない．したがって，この場合の量子アインシュタイン方程式は反対称部分をもち，$T_{\mu\nu}-T_{\nu\mu}=0$ という方程式を与えることになる．これは s_{ab} の場の方程

式にほかならない.

これ以外に, s_{ab}, $\bar{t}_{ab}$, t_{ab} に関する変分からでてくる場の方程式がある. たとえば, s_{ab} に関する変分から得られるものは

$$\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu \hat{\Gamma}_\nu{}^{ab}=0 \tag{11.27}$$

である. これらはいずれもヤン－ミルズ場の場合のものと完全に対応している.

正準量子化はすべて矛盾なく行われ, 場と場の時間微分との間の同時刻超交換関係はすべて閉じた形で求まる. このとき, $g_{\mu\nu}$, b_ρ, c^σ, $\bar{c}_\tau$ などに関する同時刻超交換関係は, 全く変更なくそのまま成立する. また, テンソル的交換関係も成立し, 新しい多くの例証が得られる. とくに

$$[\hat{\Gamma}_\mu{}^{ab}(x), b_\rho(y)] = -i\kappa(\tilde{g}^{00})^{-1}\delta_\mu{}^0\hat{\Gamma}_\rho{}^{ab}\delta^3(x-y) \tag{11.28}$$

の成立は重要である. これと式 (11.6) とを用いることにより, 式 (8.12) が容易に証明される[30].

16次元の ポアンカレ的超代数の 生成子 $P(X)$ と $M(X, Y)$ に関する表式や超交換関係はみなそのままに保持される.

このようにすべてが明快なのは, もちろん $\mathscr{L}_{\rm LGF}$ の選定において要請 iii) を満たすようにしたからである. 式 (11.24) は一見複雑に見えるけれども, 非常に自然なものなのである.

局所内部ローレンツ変換に対応する BRS 変換の生成子は, 式 (6.17) と同じように

$$Q_{\rm s} \equiv \int d^3x\tilde{g}^{0\nu}(s_{ab}D_\nu{}^{ab}{}_{cd}t^{cd} - \partial_\nu s_{ab}\cdot t^{ab} + i\partial_\nu \bar{t}_{ab}\cdot t^{bc}t^a{}_c) \tag{11.29}$$

によって与えられる. 補助条件は, 式 (9.6) と

$$Q_{\rm s}|f\rangle=0 \tag{11.30}$$

とを連立させる. このとき物理的S行列のユニタリ性が証明される.

$\mathscr{L}_{\rm LGF}+\mathscr{L}_{\rm LFP}$ は, 全域的な内部ローレンツ変換に対する不変性を破っていないので, $\mathscr{L}_{\rm QG}$ はその不変性をもっている. この変換の生成子は

$$M_{\rm L}{}^{ab} \equiv 2\int d^3x\tilde{g}^{0\nu}(D_\nu{}^{ab}{}_{cd}s^{cd} - i\bar{t}^a{}_e D_\nu{}^{eb}{}_{cd}t^{cd} + i\bar{t}^b{}_e D_\nu{}^{ea}{}_{cd}t^{cd}) \tag{11.31}$$

で与えられる.

16 次元のポアンカレ的超代数を見いだしたのと同様の手法により，$M_{\mathrm{L}}{}^{ab}$ や Q_{s} を含む超代数が存在することが知られる[48]．これは $4\times6+5=29$ 個の生成子から成りランダウ・ゲージのヤン－ミルズ場の共変的正準量子論において存在する $4N+5$ 個の生成子から成る超代数と，その構造が完全にパラレルである．

11・6　素粒子論におけるローレンツ変換の意味

$g_{\mu\nu}$ を基本場とする場合から重大な変更を要するのは，一般線形変換の自発的対称性の破れに関する部分である．$h_{\mu a}$ が基本場であるから，式 (9.13) に代わって

$$\langle 0|h_{\mu a}(x)|0\rangle=\eta_{\mu a} \tag{11.32}$$

とするべきである．式 (11.32) の右辺は特別な形のように見えるかもしれないが，並進不変性が自発的に破れないことと，$\langle 0|g^{\mu\nu}|0\rangle$ が存在することを要請すれば，一般的な形を仮定しておいても適当な変換により式 (11.32) に帰着することが示せる[31]．

一般線形変換の生成子と四脚場との交換関係は，そのベクトル性から期待されるように

$$[\hat{M}^{\mu}{}_{\nu}, h_{\sigma c}]=-i(x^{\mu}\partial_{\nu}h_{\sigma c}+\delta_{\sigma}{}^{\mu}h_{\nu c}) \tag{11.33}$$

で与えられる．したがって，式 (11.32) により

$$\langle 0|[\hat{M}^{\mu}{}_{\nu}, h_{\sigma c}]|0\rangle=-i\delta_{\sigma}{}^{\mu}\eta_{\nu c} \tag{11.34}$$

である．つまり，$\hat{M}^{\mu}{}_{\nu}$ の 16 成分全部の対称性が自発的に破れている．

式 (11.31) に与えた全域的な内部ローレンツ変換の生成子と $h_{\sigma c}$ との交換関係は

$$[M_{\mathrm{L}}{}^{ab}, h_{\sigma c}]=-i(\delta_{c}{}^{a}h_{\sigma}{}^{b}-\delta_{c}{}^{b}h_{\sigma}{}^{a}) \tag{11.35}$$

なることが示される．同様に

$$[M_{\mathrm{L}}{}^{ab}, \psi]=-i\sigma^{ab}\psi \tag{11.36}$$

である．式 (11.35) と (11.32) から

$$\langle 0|[M_{\mathrm{L}}{}^{ab}, h_{\sigma c}]|0\rangle=-i(\delta_{c}{}^{a}\delta_{\sigma}{}^{b}-\delta_{c}{}^{b}\delta_{\sigma}{}^{a}) \tag{11.37}$$

を得る．それゆえ

$$M_{\alpha\beta}\equiv\eta_{\alpha\mu}\hat{M}^{\mu}{}_{\beta}-\eta_{\beta\mu}\hat{M}^{\mu}{}_{\alpha}+\eta_{\alpha a}\eta_{\beta b}M_{\mathrm{L}}{}^{ab} \tag{11.38}$$

を導入すると

$$\langle 0|[M_{\alpha\beta}, h_{\sigma c}]|0\rangle=0 \tag{11.39}$$

であることがわかる．

式 (11.39) は非常に基本的に重要な意味をもつ式である．すなわち，今度は式 (9.15) で定義した $\overline{M}_{\alpha\beta}$ に代わって，付加項 $\eta_{\alpha a}\eta_{\beta b}M_{\mathrm{L}}{}^{ab}$ のついた $M_{\alpha\beta}$ が自発的に破れていない対称性を与える．この $M_{\alpha\beta}$ がまさしく素粒子論で考えているローレンツ変換の生成子にほかならない．実際，たとえば，式 (11.36) と，$\psi(x)$ が $\hat{M}^{\mu}{}_{\nu}$ に対してスカラー場として振る舞うという式から

$$[M_{\alpha\beta}, \psi]=-i(x_{\alpha}\partial_{\beta}-x_{\beta}\partial_{\alpha}+\mathring{\sigma}_{\alpha\beta})\psi \tag{11.40}$$

という，スピノル場との正しい交換関係が得られる．

こうして，一般共変なディラック理論の ψ のローレンツ変換性が，重力場の共変的正準量子論の枠内においてはじめて自然に導かれた[49,31]．つまり，時空対称性としてのローレンツ生成子 $M_{\alpha\beta}$ は，式 (11.39) によってユニークに特徴づけられているのである．このことは，古典論においてはもちろん，非共変な正準量子論や，ファインマンの経路積分法でも説明不可能であることを強調しておきたい．

素粒子論におけるローレンツ変換が，このように自発的対称性の破れという表現を決める段階ではじめて現れることは，本質的に重要な新しい知見である．すなわち，ローレンツ不変性は，重力場をも含めた最も基本的な理論においては，広く信じられているところと異なり，ラグランジアン密度を支配する第一原理ではありえないのである．

12章　発散の問題と重力場の量子論

12・1　摂動論における発散の問題

重力場の共変的正準量子論の美しい構成は，すべてハイゼンベルク描像に基づいている．相互作用描像を用いて摂動計算をするならば，この理論とファインマンの経路積分法とでは，前者での結果の方がいくぶんすっきりしているというくらいで，両者間に質的な相違はない*．摂動級数が同一にならないのは，ラグランジアン密度のとり方が異なるからである．ファインマンの経路積分法で通常考えられる実効的ラグランジアン密度は

$$\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{E}}+\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{GF}}+\mathscr{L}_{*\mathrm{FP}}+\frac{1}{2}\alpha\eta^{\mu\nu}b_\mu b_\nu+\mathscr{L}_{\mathrm{M}} \qquad (12.1)$$

で $\alpha\neq0$ として b_μ を消去して得られるものである．

摂動計算には

$$\tilde{g}^{\mu\nu}\equiv\eta^{\mu\nu}+2\sqrt{\kappa}\,\phi^{\mu\nu} \qquad (12.2)$$

とおき，$\phi^{\mu\nu}$ についてラグランジアン密度を書き直すのが便利である．摂動級数は，$h^k g_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}$ や $h^k g^{\mu\nu}-\eta^{\mu\nu}$ のうちどれを $\sqrt{\kappa}$ のオーダーの基本量と考えるかによっていくぶん変わってくるが，その差は重要でない．摂動論は重力場の共変的正準量子論にとって本質的でないので，定性的結果を述べるだけにとどめる．

$\sqrt{\kappa}$ が長さの次元をもつことから当然期待されるように，重力場の量子論はくりこみ不可能 (unrenormalizable) な理論である．引算によって発散を消すためには，ラグランジアン密度に次から次へと新しいタイプの引算項 (counter

* もちろん共変的正準量子論では，10章で述べたポアンカレ的超対称性が摂動論においても満たされている．

term）をつけ加えていかなければならない．これでは閉じた理論とはいえない．さらに具合の悪いことには，1ループ近似ですでに，引算項は一般座標変換に対しスカラー密度であるような項だけではだめだということが知られている[50]．このように，重力場の量子論の摂動論的な紫外発散をくりこみによって処理するという考え方は，絶望的であるといってよい*.

重力場のくりこみ不可能性を回避するために，hR^2 や $hR^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ に比例する項を最初からラグランジアン密度につけ加えるという考え方がある[52]．こうすると，相互作用描像では自由場に高階微分を導入したのと同じで，形式的にくりこみ可能になる．しかし，これは古くから知られているように[53]，閉じこめられないお化けを導入することになり，ユニタリ性をこわす．ユニタリ性は非摂動的にやれば救えるかもしれないという期待を表明する人があるが，これは論理の首尾一貫性を欠くように思われる．美しい一般相対論のラグランジアン密度に不透明な付加項をつけ加える唯一の根拠が摂動論での発散の困難なのであるから，それほどまでに摂動論を重視する立場なら最後まで摂動論を尊重する考え方を貫くべきであろう．

重力場の量子論で摂動計算をやるのは，他にいい計算法が見つからないからという以外に，あまり積極的な理由があるとは思えない．量子電磁力学ならば摂動はきわめてよい近似であり，しかもそれと比較できる多くの精度の高い実験結果が存在する．これに対し，重力場の量子論では，摂動がよい近似であるという保証はないし，また比較できる実験結果も全くない**.

重力場の量子論の摂動級数が信用できないことは，ファインマン積分が $1/\sqrt{\kappa}$ よりも絶対値の大きい4次元運動量 k_μ まで含んでいることから明らかであろう．実際 k_μ の代わりに無次元の量 $\sqrt{\kappa}k_\mu$ を用いて表せば，摂動級

* 背景場法[51] (background field method) を用いると，物質場がない限り重力場の量子論の1ループ近似でだけは発散がでないことが知られている．しかし，背景場法ではもともとダイソンのくりこみ処法が使えず，くりこみ可能性を論ずるのには適していない．

** 摂動の1ループ近似で万有引力の補正を計算し，それによって水星の近日点移動を説明するという話がある[54]．しかし，この計算は明白に巨視的な対象である天体を1個の素粒子のごとくに考えてやっているので，正当とは思えない．また，天体を構成する個々の素粒子についてのファインマン図だと考えると，結果がそれぞれの素粒子の質量に比例するのでなければ，天体についての陳述には直せない．

数は $\sqrt{\kappa}$ の冪級数ではなくなってしまう．$\sqrt{\kappa}$ は調節できるパラメーターではなく，むしろ長さの次元の単位を与えるものである．すなわち，κ は c や $\hbar$ と同列の基本単位とみなすべきものであろう．プランクの輻射公式を $\hbar$ の冪級数に展開すれば，各項の積分は次つぎに強い紫外発散を示す．重力場の量子論の摂動展開もおそらくこれと同じような罪を犯しているものと考えてよいであろう．

12・2 非摂動的アプローチ

重力場の量子論の摂動論における深刻な破綻とは完全に対照的に，重力場の量子効果が通常の場の量子論の紫外発散さえもすべて解消してくれるのではないかという期待が古くから存在する[55]．これは，紫外発散がミンコフスキー空間というア・プリオリに定まった構造をもっている空間の中で場の量子論を定式化することからくる宿命であると考えられるからである．時空の計量自身が量子化されてしまうと，光円錐のような特異性はもっとフワフワしたものになる可能性がある．つまり，光円錐上でc数の超関数で記述されるような特異性はもたなくなるだろうと期待される．さらにまた重力場の理論は，κ^{-1} という運動量の自乗の次元をもつ定数を含んでいることから，それが自然なカットオフ（cut-off）の役割を演ずるのではないかと期待される．重力場は他の場とちがって，すべての場とユニバーサルに結合しているので，これらの期待は根拠のないことではない．

もし，場の量子論は重力まで含むときにはくりこみなしにも有限な理論であると仮定するならば，今まで素粒子論においてくりこみ可能性の要請がなぜいつも成功を収めてきたのかを説明しなければならない．これは次のように想像することができる．κ^{-1} が自然なカットオフだということは，重力場を無視した近似である通常の素粒子論の計算はすべて $\kappa^{-1}\to\infty$ としていることに相当し，このために発散が現れていることになる．そこで，もしもカットオフ・パラメーターの冪で発散するような量が存在していたとすると，重力場を考慮した有限理論では κ の負冪が現れることになる．これは通常の素粒子論で考える

エネルギー領域では超巨大数であるから，こういうものがもろに出てくればまともな近似計算は成立しえないであろう．それゆえ，通常の素粒子論で意味のある計算ができるためには，対数的発散のみが許されることになる．対数的発散のみという要請はくりこみ可能性より少し強いが，ヒッグス・スカラー(Higgs scalar) を除いて*，ゲージ理論において満たされているものである．

重力場が発散の困難を解消する可能性を具体的に示そうとした試みに，超伝播関数 (superpropagator) の方法[56] がある．これは，重力場のラグランジアン密度が場の多項式でないため，ファインマン図において同一2頂点間を結ぶ重力場の内線が何本でもあることが可能になるので，それらの内線を超伝播関数として先に足し上げてしまおうという考え方である．この無限数級をゾンマーフェルト-ワトソン変換 (Sommerfeld-Watson transform) して，解析接続すると有限の結果が得られる．

この方法は，しかしながら，重力場の時空的特質を何も使っていない．使っているのは，要するにS行列の計算の段階において解析接続の手法により有限部分をとっているということである．つまり発散が消えることの場の量子論的な根拠が明らかでない．場の量子論的には次の節で述べるように，正定値計量では発散が本質的に解消するはずはないのである．超伝播関数の方法を用いると正定値計量の非多項式スカラー場理論でも発散がなくなるが，他方，もっと厳密な考察ではそのような理論は通常のくりこみ可能なスカラー場理論よりも収束性がよくなることはありえないことが証明されているのである[57]．このようなわけで，場の量子論を基礎とする立場では，超伝播関数の方法を額面通り信用するわけにはいかないのである．

12·3　レーマンの定理と重力場

発散の問題は，摂動論や特別の技法を用いた近似法によらず，正確にいえる一般的な結果からまず考察すべきであろう．

---

* ヒッグス・スカラーの高次補正は，通常の素粒子論の枠内で意味のある概念かどうかは不明である．

場の量子論で，正確な2点関数がスペクトル表示をもつことはよく知られている．すなわち，たとえばスカラー場 $\phi(x)$ に対し

$$i\mathscr{F}\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle=\int_0^\infty \mathrm{d}s\frac{\rho(s)}{s-p^2-i0} \tag{12.3}$$

が成立する．ここに $\mathscr{F}$ はフーリエ変換，Tは時間順序積を表す．スペクトル関数 $\rho(p^2)$ は $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ のフーリエ変換として与えられるが，もしも状態ベクトルの空間の計量が正定値であると，中間に完全系 $1=\sum_n|n\rangle\langle n|$ をはさめば，$\rho(p^2)$ は $|\langle n|\phi(0)|0\rangle|^2$ をその4次元運動量 p_n が p に等しいような状態ベクトル $|n\rangle$ について加え合わせたもので書けることになる．したがって，正定値計量なる限り，つねに

$$\rho(s)\geqq 0 \tag{12.4}$$

が成立する．それゆえ正確な2点関数は，$p^2\to\infty$ のとき，自由場の2点関数すなわちファインマンの伝播関数の漸近的振舞い $\sim 1/p^2$ よりもよくなることは決してありえない．この事実をレーマンの定理[58) (Lehmann's theorem) という．これは，正定値計量である限り，スピンのある場の場合にも拡張される．

ダイソンの積分方程式 (Dyson's integral equation) にレーマンの定理を適用すると，バーテックス部分 (vertex part) が漸近的にゼロにならない限り，自己エネルギー (self-energy) の積分の発散は避けられないことがわかる．バーテックス部分が漸近的にゼロに行くということは，はだかの結合定数 (bare coupling constant) とくりこまれた結合定数とが有限な関係式では結ばれないことを意味する．このようにして，正定値計量の理論を考えている限り発散の完全な解消は不可能であると考えられる．

不定計量を導入すれば発散の解消は容易であるが，今度はユニタリ性をこわす．ユニタリ性に抵触しないで不定計量の導入に成功したのは，ゲージ理論である．ゲージ理論では発散の困難の解決を目指して不定計量を導入したのではないが，それにもかかわらず発散のオーダーを低くしている事実は注目すべきであろう．たとえば，量子電磁力学で自己エネルギーに2次発散がでないのは，ゲージ不変性のおかげである．しかし，もちろんゲージ理論では発散の困難は解決しない．その主たる理由は，もし $\varPhi(x)$ が BRS 不変だとすると，

$\boldsymbol{\Phi}(x)|0\rangle$ は $\mathcal{V}_{\rm phys}$ に属するため，式（4.6）のおかげでレーマンの定理がそのまま成立してしまうからである．

式（4.6）は物理的S行列のユニタリ性の証明にとって基本的な式であるから，不定計量を導入してもユニタリ性を保証する限り，発散の困難の事情は本質的に変わらないのではないかという推測が，これまで長い間信じられてきた．ところが，重力場の共変的正準量子論をみると，じつはそうではないことがわかる[59]．重力場がゲージ場と本質的に異なるところは，BRS 変換が時空対称性である点である．式（9.5）と（7.16）からわかるとおり，BRS 変換の生成子 $Q_{\rm b}$ と任意の局所量 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ との超交換関係は

$$i[Q_{\rm b}, \boldsymbol{\Phi}]_{*}=\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\Phi})-\kappa c^{\mu}\partial_{\mu}\boldsymbol{\Phi} \tag{12.5}$$

であり，右辺の第1項は c^{μ} を微分したものしか含まないので，$\boldsymbol{\Phi}$ 自身が c^{μ} をなまに含んでいるのでない限り*，式（12.5）の右辺は決してゼロにならない．このことから，重力場の共変的正準量子論では $\langle 0|\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}(y)|0\rangle$ の中間に完全系をはさむとき，一般に負ノルムの状態ベクトルからの寄与をも含むことになる．つまりレーマンの定理が適用されない．

このように，物理的S行列のユニタリ性を保証しながらレーマンの定理が適用されないことは，発散の困難の解決に大きな期待を抱かせるものといえよう．なお，16次元のポアンカレ的超対称性の存在も，発散解消の期待を大きくさせるものである．一般原則として，対称性がより大きければ，発散の出現の可能性はより少なくなるからである．

12・4　後藤－今村の矛盾の解消

通常の場の量子論において，最も病的な様相を呈しているのが，後藤－今村の矛盾[60]（Goto-Imamura difficulty）である．

自由ディラック理論でも量子電磁力学でもよいが，ディラック場 $\psi(x)$ から作られる保存電流 $j_{\mu}(x)$ を考える．$\psi(x)$ の正準反交換関係を用いて素朴に計算すると

---

* 実際，式（12.5）の右辺がゼロになるのは，$\boldsymbol{\Phi}$ 自身が他の量の $\boldsymbol{\delta}_{*}$ で書けるときに限る．

$$[j_0(x),\ j_k(y)]_{x^0=y^0}=0 \tag{12.6}$$

である．

他方，ローレンツ共変性，局所性，および $\partial^\mu j_\mu=0$ に基づく一般的考察から

$$\langle 0|[j_\mu(x), j_\nu(y)]|0\rangle=-i\int_0^\infty \mathrm{d}s\pi(s)(s\eta_{\mu\nu}+\partial_\mu\partial_\nu)\Delta(x-y; s) \tag{12.7}$$

と書けることが示される．ここにスペクトル関数 $\pi(s)$ は，$j_\mu(x)$ がゲージ不変量であることにより，$\mu=\nu=0$ の部分を考えるとレーマンの定理の場合と同じようにして

$$\pi(s)\geqq 0 \tag{12.8}$$

がいえる．それゆえ，同時刻をとると

$$\langle 0|[j_0(x), j_k(y)]_{x^0=y^0}|0\rangle=i\int_0^\infty \mathrm{d}s\pi(s)\,\partial_k\delta^3(x-y)$$
$$\neq 0 \tag{12.9}$$

となって，式 (12.6) と矛盾する．

この矛盾の広く受け容れられている解決法では，一般的考察による結論 (12.9) を正しいものとし，式 (12.6) は同時空点での場の演算子の積を不用意に取り扱っているから誤りだとしている．すなわち，電流の同時刻交換関係には正準反交換関係からは導けない寄与があるとするのである[61]．これをシュヴィンガー項 (Schwinger term) という．

しかしながら，シュヴィンガー項はきわめて病的な存在である．それを導くのに，正準交換関係の δ 関数をひろげるとか，$j_\mu(x)$ に使われる $\bar{\psi}(x)$ と $\psi(x)$ の x^μ の値をスプリットさせるとか，共変的摂動論の結果を信用してそれに基づいて計算するとか，いろいろな方法が考えられるが，シュヴィンガー項の形は一般に計算法に依存してしまい，どれを正しいものとすべきかわからない[62]．しかも極限操作を利用した定義であるので，ヤコービの恒等式さえ満たさなくなってしまうのである[63]．

この気持ちの悪いシュヴィンガー項は，重力場の量子論により消滅する．自由場であってもエネルギー・運動量をもつ以上，重力場とは必ず結合すべきである．それゆえ，重力場の効果を無視してスペクトル関数 $\pi(s)$ を $s\gtrsim\kappa^{-1}$ の

領域でまで考えるのは正当ではない．重力場を考慮すると，式（12.4）が破れたのと全く同じ理由により式（12.8）が破れるから

$$\int_0^\infty \mathrm{d}s\pi(s)=0 \tag{12.10}$$

が可能となる．したがって，式（12.6）が正しいとしても少しも困らない．むしろ，式（12.6）が（12.10）の証明になっていると考えるべきである．

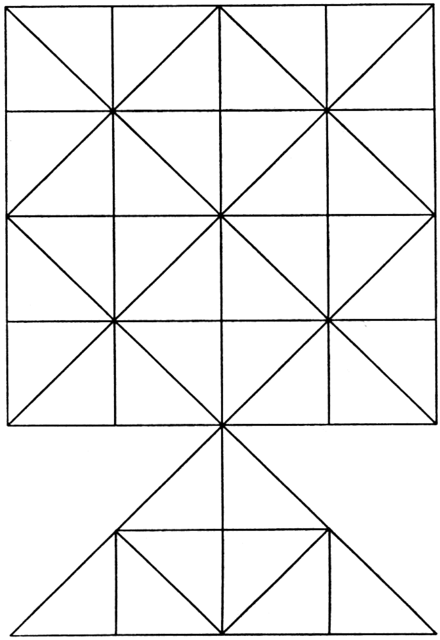
このように重力場の共変的正準量子論は，後藤－今村の矛盾を明快に解消するのである．

おわりに

以上のように，重力場の共変的正準量子論はきわめて満足すべき理論形式であることが明らかとなった．最後に少し哲学的なことではあるが，“計量 $g_{\mu\nu}$ を量子化してしまうと一体距離概念などはどうなるのか”というような質問に対する回答を述べておこう．

場の量子論では，量子力学の場合と異なり自己場の効果があるので，有限の時刻で観測することはできない．それゆえ，場の演算子 $\varphi_\alpha(x)$ の中の x^μ は，時空というより四つのパラメーターとみる方が妥当と考えられる．それが時空と結びつくのは，漸近場の段階においてである．このように考えれば，重力場を量子化しても計量が演算子であるような奇妙な時空を想像する必要はないであろう．幾何学的なイメージは，量子論にとってむしろ有害である．

このように，場の演算子の中の x^μ は古典論の時空 x^μ と直接には結びつかないので，重力場の量子論と一般相対論との関係も直接的というわけにはいかない．量子電磁力学の場合，量子マックスウェル方程式 (5.6) を物理的な状態ベクトルではさむと古典的なマックスウェル方程式が得られるが，このことは電磁場の線形性という特殊性に負っているのである．同じことを本質的に非線形な量子アインシュタイン方程式に対し期待するのはナンセンスである．場の演算子の積がそれぞれに対応する古典場の積に対応するのは，空間的遠方以外では期待できない．古典場との直接的な関連性は，むしろ電磁場の場合の外場のような形ででてくる．ただし重力場の場合は非線形であるので，外場との相互作用としてでなく，背景場という形で導入される．つまり，式 (9.13) の代わりに



十六むさし盤面．正方形の中心点に親の駒，ふちの16個の点に子の駒をおいてゲームを始める

$$\langle 0|g_{\mu\nu}(x)|0\rangle = g^{\text{clas}}{}_{\mu\nu}(x)$$

を設定することにより，曲がった時空内での量子論が考えられる[64]．しかし，この場合は $g_{\mu\nu}(x)$ の中の x^μ が時空と直接解釈されねばならないので，論理的にすっきりした定式化はできない．

最後に，余談だが，重力場の共変的正準量子論の“登録商標”を与えておく．

“十六むさし”は平安時代から伝わる日本の伝統的ゲームである．この $4\times4=16$ の盤面構造は，16次元のポアンカレ的超代数を象徴しているものといえるだろう．下の三角形部分，すなわちいわゆる“雪隠”は，四脚場を接点としてつながる内部ローレンツ変換に関連した超代数に対応するものと考えうる．

参考文献

1) 坪野公夫, 生出勝宣：自然 1979 年 4 月号, p. 60; I. I. Shapiro : in "Relativity, Quanta and Cosmology", Vol. II, ed. by F. de Finis, Johnson Reprint Corporation (1979), p. 725
2) D. M. Greenberger & W. A. Overhauser : *Scientific American*, May 1980, p. 66 (和訳：サイエンス 1980 年 7 月号)
3) 内山龍雄：科学 **46**, 19 (1976)
4) L. Rosenfeld : *Ann. Physik*, **5**, 113 (1930); *Z. Physik*, **65**, 589 (1930)
5) P. A. M. Dirac : *Canad. J. Math.*, **2**, 129 (1950)
6) P. A. M. Dirac : *Proc. Roy. Soc.*, **A 246**, 333 (1958)
7) A. Komar : in "Quantum Theory and Gravitation" ed. by A. R. Marlow, Academic Press (1980), p. 127
8) R. Arnowitt, S. Deser & C. W. Misner : in "Gravitation, An Introduction to Current Research" ed. by L. Witten, John Wiley & Sons (1962)
9) J. A. Wheeler : Relativistic Group and Topology, Les Houches Lectures, Gordon and Breach (1964)
10) S. W. Hawking : in "General Relativity" ed. by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge Univ. Press (1979), p. 746; L. D. Faddeev & V. N. Popov : *Sov. Phys. Usp.*, **16**, 777 (1974)
11) S. N. Gupta : *Phys. Rev.*, **172**, 1303 (1968)
12) S. Mandelstam : *Ann. Phys.*, **19**, 25 (1962); *Phys. Rev.*, **175**, 1604 (1968)
13) N. Nakanishi : *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **19**, to be published.
14) R. Schoen & S. T. Yau : *Commun. Math. Phys.*, **65**, 45 (1979); *Phys. Rev.*, **43**, 1457 (1979); J. M. Nester : *Phys. Letters*, **83A**, 241 (1981)
15) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **35**, 1111 (1966); B. Lautrup : *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **35**, No. 11 (1967)
16) P. A. M. Dirac : Lectures on quantum mechanics, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Univ. (1964)
17) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **63**, 2078 (1980), Appendix
18) R. P. Feynman : *Acta Phys.* Polonica, **24**, 697 (1963)
19) B. DeWitt : *Phys. Rev.*, **162**, 1195 (1967); **162**, 1239 (1967)

20) L. D. Faddeev & V. N. Popov : *Phys. Letters*, **25B**, 29 (1967); L. D. Faddeev : *Theor. Math. Phys.*, **1**, 1 (1969)
21) T. Kugo & I. Ojima : *Phys. Letters*, **73B**, 459 (1978); *Prog. Theor. Phys.*, **60**, 1869 (1978); **61**, 294 (1979); **61**, 644 (1979)
22) C. Becchi, A. Rouet & R. Stora : *Commun. Math. Phys.*, **42**, 127 (1975); *Ann. Phys.*, **98**, 287 (1976)
23) G. Curci & R. Ferrari : *Nuovo Cim.*, **35A**, 273 (1976)
24) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **59**, 972 (1978)
25) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **60**, 284 (1978)
26) R. Delbourgo & M. R. Medrano : *Nucl. Phys.*, **B110**, 476 (1976); K. S. Stelle : *Phys. Rev.*, **D16**, 953 (1977); P. K. Townsend & P. van Nieuwenhuizen : *Nucl. Phys.*, **B120**, 301 (1977)
27) K. Nishijima & M. Okawa : *Prog. Theor. Phys.*, **60**, 272 (1978); T. Kugo & I. Ojima : *Nucl. Phys.*, **B144**, 234 (1978)
28) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **59**, 2175 (1978)
29) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **60**, 1190 (1978)
30) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **63**, 656 (1980)
31) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **66**, 1843 (1981)
32) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **60**, 1890 (1978)
33) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **62**, 1385 (1979)
34) N. Nakanishi & I. Ojima : *Phys. Rev. Letters*, **43**, 91 (1979)
35) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **63**, 2078 (1980)
36) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **64**, 639 (1980)
37) S. Kawasaki, T. Kimura & K. Kitago : *Prog. Theor. Phys.*, **66**, 2085 (1981)
38) S. Coleman & J. Mandula : *Phys. Rev.*, **159**, 1251 (1967); R. Haag, J. T. Lopuszański & Sohnius : *Nucl. Phys.*, **B88**, 257 (1975)
39) S. Ferrara : *Rivista Nuovo Cim.*, **6**, 105 (1976)
40) P. van Nieuwenhuizen & D. Z. Freedman (eds.) : Supergravity, North-Holland (1979)
41) N. Nakanishi & I. Ojima : *Prog. Theor. Phys.*, **65**, 1041 (1981)
42) N. Nakanishi & K. Yamagishi : *Prog. Theor. Phys.*, **65**, 1719 (1981)
43) N. Nakanishi & I. Ojima : *Prog. Theor. Phys.*, **65**, 728 (1981)
44) D. R. Brill & J. A. Wheeler : *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 465 (1957); T. W. B. Kibble : *J. Math. Phys.*, **2**, 212 (1961)
45) 内山龍雄：一般相対性理論（物理学選書 15），裳華房（1978），第 5 章
46) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **62**, 779 (1979)

47) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **62**, 1101 (1979)
48) N. Nakanishi & I. Ojima : *Z. Physik* C, **6**, 155 (1980)
49) 中西　襄：素粒子論研究 **60**, 131 (1979)
50) G. Leibbrandt : *Rev. Mod. Phys.*, **47**, 849 (1975)
51) G. 't Hooft & M. Veltman : Annales de l'Institut Henri Poincaré, Sect. A **20**, 69 (1974)
52) K. S. Stelle : *Phys. Rev.*, D**16**, 953 (1977); J. Julve & M. Tonin : *Nuovo Cim.*, **46B**, 137 (1978); A. Salam & J. Strathdee : *Phys. Rev.*, D**18**, 4480 (1978); S. Kawasaki & T. Kimura : *Prog. Theor. Phys.*, **65**, 1767 (1981)
53) A. Pais & G. E. Uhlenbeck : *Phys. Rev.*, **79**, 145 (1950); N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **51**, 1 (1972), §14
54) Y. Iwasaki : *Prog. Theor. Phys.*, **46**, 1586 (1971)
55) P. G. Bergmann : *Helv. Phys. Acta Suppl.*, **4**, 79 (1956); L. Landau : in "Niels Bohr and the Development of Physics" ed. by W. Pauli, McGraw-Hill (1955), p. 52
56) C. J. Isham, A. Salam & J. Strathdee : *Phys. Rev.*, D**3**, 1805 (1971); D**5**, 2548 (1972); M. S. Sri Ram & T. Dass : *Phys. Rev.*, D**22**, 814 (1980)
57) J. Kiskis : *Phys. Rev.*, D**24**, 960 (1981)
58) H. Lehmann : *Nuovo Cim.*, **11**, 342 (1954)
59) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **63**, 1823 (1980)
60) T. Goto & T. Imamura : *Prog. Theor. Phys.*, **14**, 396 (1955)
61) J. Schwinger : *Phys. Rev. Letters*, **3**, 296 (1959)
62) C. A. Orzalesi : Lectures on Field-Theoretic Aspects of Current Algebra (1968)
63) K. Johnson & F. E. Low : *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **37 & 38**, 74 (1966)
64) N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys.*, **61**, 1536 (1979)

重力場の量子論関係書

C. J. Isham et al. (eds.) : Quantam Grovity, an Oxford Symposium, Oxford Univ. Press (1975)

A. Marlow (ed.) : Quantum Theory and Gravitation, Academic Press (1980)

C. J. Isham et al. (eds.) : Quantum Gravity 2, a 2nd Oxford Symposium, Clarendon Press (1981)

一般相対論参考書

内山龍雄：一般相対性理論（物理学選書 15），裳華房（1978）

場の量子論参考書

中西　襄：場の量子論（新物理学シリーズ 19），培風館（1975）

不定計量の解説

N. Nakanishi : *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **51**, 1 (1972)
電磁場のB場形式の解説
中西　襄：場の量子論（新物理学シリーズ 19），培風館（1975），第3章
九後－小嶋形式の解説
T. Kugo & I. Ojima : *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **66**, 1 (1979)